详细解答

STEP I 2004，第 7 题

纯数学 · 生成函数

STEP I 2004，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q7

关键思路

线性递推关系（linear recurrence）与幂级数（power series）是同一个对象的两种描述。把级数乘以 $1-7x+10x^2$，每个系数 a_n 便会与 a_{n-1} 和 a_{n-2} 对齐，于是递推关系令乘积中几乎所有系数都变为零。剩下来的是一个多项式，所以 f 是有理函数（rational function）。接着利用部分分式（partial fractions）和几何级数（geometric series），便可直接得出 a_n。第 (ii) 部分用的是同一套方法，只需先由已知数值求出 p 和 q。

解答

第 (i) 部分

当 $|x|<\frac{1}{5}$ 时，级数收敛（converge），所以我们可以把级数乘以 x 的幂，并逐项相加：

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \\ -7x\,\mathrm{f}(x) &= -7a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} 7a_{n-1} x^n, \\ 10x^2\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} 10a_{n-2} x^n. \end{aligned}$$

（在第二行和第三行，我们重新标记了求和指标，使每个和式都是对 x^n（$n \geq 2$）求和。）相加得

$$\mathrm{f}(x) - 7x\,\mathrm{f}(x) + 10x^2\mathrm{f}(x) = a_0 + (a_1 - 7a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2})x^n.$$

根据递推关系，和式中每个括号都等于零，而 $a_0 = 2$，$a_1 - 7a_0 = 7 - 14 = -7$。所以

$$(1 - 7x + 10x^2)\,\mathrm{f}(x) = 2 - 7x.$$

现在 $1 - 7x + 10x^2 = (1 - 2x)(1 - 5x)$，当 $|x| < \frac{1}{5}$ 时不等于零，所以可以相除：

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 2x)(1 - 5x)}.$$

分子正好是两个因式之和，$(1 - 5x) + (1 - 2x) = 2 - 7x$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(1 - 5x) + (1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 5x)} = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 5x},$$

正如所求。

当 $|x| < \frac{1}{5}$ 时，我们有 $|2x| < 1$ 和 $|5x| < 1$，所以两个分式都是收敛几何级数之和：

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5^n)x^n.$$

? **想一想** 为甚么现在可以直接读出 a_n？

我们有两个幂级数，它们对区间 $|x| < \frac{1}{5}$ 内的每个 x 都相等。幂级数由它在 0 附近的值决定：它的系数可以由 $a_n = \mathrm{f}^{(n)}(0)/n!$ 还原出来。所以两者的系数必定相同，于是

$$a_n = 2^n + 5^n \quad \text{对所有} n \geq 0.$$

（简单验算一下：$a_0 = 1 + 1 = 2$，$a_1 = 2 + 5 = 7$。）

第 (ii) 部分

首先要求出 p 和 q。把 $n = 2$ 和 $n = 3$ 代入递推关系：

$$\begin{aligned} b_2 = pb_1 + qb_0: &\quad 40 = 10p + 5q, \quad \text{所以} 2p + q = 8; \\ b_3 = pb_2 + qb_1: &\quad 100 = 40p + 10q, \quad \text{所以} 4p + q = 10. \end{aligned}$$

两式相减，得 $2p = 2$，所以 $p = 1$ 及 $q = 6$。递推关系是 $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$。

与第 (i) 部分完全一样，乘以 $1 - x - 6x^2$ 会消去由 x^2 起的所有系数：

$$(1 - x - 6x^2)\,\mathrm{g}(x) = b_0 + (b_1 - b_0)x = 5 + 5x.$$

由于 $1 - x - 6x^2 = (1 - 3x)(1 + 2x)$，当 $|x| < \frac{1}{3}$ 时不等于零，

$$\mathrm{g}(x) = \frac{5 + 5x}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{1 + 2x},$$

其中 $5+5x = A(1+2x)+B(1-3x)$。代入 $x=\frac{1}{3}$ 得 $\frac{20}{3}=\frac{5}{3}A$，所以 $A=4$；代入 $x=-\frac{1}{2}$ 得 $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}B$，所以 $B=1$。因此

$$\mathrm{g}(x)=\frac{4}{1-3x}+\frac{1}{1+2x}.$$

当 $|x|<\frac{1}{3}$ 时，我们有 $|3x|<1$ 和 $|2x|<1$，所以把两者都展开成几何级数，

$$\mathrm{g}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(4\cdot 3^n+(-2)^n)x^n,$$

再如前比较系数，

$$b_n=4\cdot 3^n+(-2)^n.$$

验算

这些公式与已知数值吻合：$4+1=5$，$12-2=10$，$36+4=40$，$108-8=100$。由递推关系逐项计算 a_n 和 b_n 直至 $n=39$，结果与 2^n+5^n 和 $4\cdot 3^n+(-2)^n$ 完全一致。数值上，在 $x=0.1$ 时，级数的部分和（partial sums）给出 f 的值为 3.25，g 的值为 6.547619…，与 $\frac{1}{0.8}+\frac{1}{0.5}=3.25$ 和 $\frac{4}{0.7}+\frac{1}{1.2}=\frac{275}{42}$ 相符。

常见错误

- 忘记递推关系只由 $n=2$ 起成立：乘积中的 x^0 项和 x^1 项必须另行计算，而它们正好给出分子。
- 在第 (ii) 部分，在 p 和 q 仍然未知时便使用递推关系，或把分子写成 b_0+b_1x 而不是 $b_0+(b_1-pb_0)x$。
- 因式分解 $1-x-6x^2$ 时弄错正负号，结果得出 3^n 和 2^n，而不是 3^n 和 $(-2)^n$。

STEP 之外

级数 f 称为数列 (a_n) 的*生成函数*（generating function），而这个方法适用于任何常系数线性递推关系：分母总是由递推关系构造出来，而它的因式则给出“特征根”（characteristic roots）（这里是 2 和 5）。生成函数是组合数学（combinatorics）和概率论的核心工具；在概率论中，概率生成函数（probability generating functions）把随机变量之和化为乘积。“相等的幂级数有相等的系数”这一步，要在大学第一门分析课程中才有严格的论证；关于幂级数及其唯一性，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。