详细解答

STEP I 2004，第 6 题

纯数学 · 三角形的向量几何

> **STEP I 2004，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q6

关键思路

以位置向量（position vector）代替分开处理的 x 坐标和 y 坐标：设 $\mathbf{a} = (p_1, q_1)$、$\mathbf{b} = (p_2, q_2)$、$\mathbf{c} = (p_3, q_3)$，则 H 的位置向量为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$。这样，题目中每一条直线都有简短的向量描述，而“互相垂直”就变成“纯量积（scalar product）为零”。出现的纯量积是一个平方差（difference of two squares）：$(\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$，而题目的后半部分就全在于此。

解答

我们假设 A、B、C 不共线（collinear），因而构成一个真正的三角形（否则第一部分的直线可能重合，便没有唯一的交点）。

中线相交

设 L、M、N 分别为 BC、CA、AB 的中点（midpoint），其位置向量为

$$\mathbf{l} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

直线 AL 上的一般点为

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{l} - \mathbf{a}) = (1 - s)\,\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{b} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{c},$$

而直线 BM 上的一般点为

$$\mathbf{b} + t(\mathbf{m} - \mathbf{b}) = \tfrac{t}{2}\,\mathbf{a} + (1 - t)\,\mathbf{b} + \tfrac{t}{2}\,\mathbf{c}.$$

只要 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的系数对应相等，这两个表达式便一致：$1 - s = \tfrac{t}{2}$、$\tfrac{s}{2} = 1 - t$ 及 $\tfrac{s}{2} = \tfrac{t}{2}$。最后一式给出 $s = t$，于是由 $1 - s = \tfrac{s}{2}$ 得 $s = t = \tfrac{2}{3}$，这组值同时满足三条等式。因此两

条直线都通过点 G，其位置向量为

$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \text{即} \qquad G = \left(\tfrac{p_1+p_2+p_3}{3}, \tfrac{q_1+q_2+q_3}{3}\right).$$

? **想一想** 比较系数找到了一个公共点。我们怎样知道它就是唯一的交点?

两条相异直线最多只有一个交点，所以我们只需确定 AL 和 BM 是不同的直线。假如它们是同一条直线，这条直线便包含 A、B 和 L，因而包含整条直线 BL，亦即直线 BC；那么 A 就会在 BC 上，与我们的假设矛盾。所以 G 是唯一的交点。

至于第三条中线（median）CN，取点 $\mathbf{c}+u(\mathbf{n}-\mathbf{c})$，其中 $u=\frac{2}{3}$：

$$\mathbf{c}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{c}\right) = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}\mathbf{b}+\tfrac{1}{3}\mathbf{c} = \mathbf{g}.$$

所以 G 位于连接 C 与 AB 中点的直线上，正如所求。（每次都得到 $\frac{2}{3}$ 这个值，说明 G（即形心（centroid））位于每条中线上由顶点起计三分之二的位置。）

在 H 处的垂直关系

点 H 的位置向量为 $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$，所以

$$\overrightarrow{AH} = \mathbf{h}-\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{BC} = \mathbf{c}-\mathbf{b}.$$

若直线 AH 与 BC 垂直相交，则这两个方向向量（direction vector）的纯量积为零：

$$0 = (\mathbf{c}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = (p_3^2+q_3^2)-(p_2^2+q_2^2),$$

其中交叉项 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ 互相抵销，因为纯量积符合交换律（commutative）。因此

$$p_2^2+q_2^2 = p_3^2+q_3^2,$$

这就是所求的结果。用文字来说，B 和 C 与原点 O 的距离相等。

以完全相同的方法，$\overrightarrow{BH}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$ 而 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$，所以若 BH 与 AC 垂直相交，则 $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，由此得

$$p_1^2+q_1^2 = p_3^2+q_3^2.$$

第三条高线

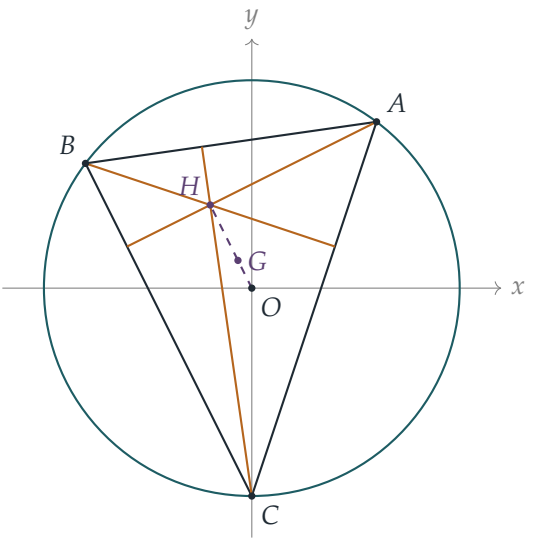
假设两个垂直条件都成立。结合以上两个结果，

$$p_1^2+q_1^2 = p_3^2+q_3^2 = p_2^2+q_2^2, \qquad \text{所以} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

现在 $\overrightarrow{CH}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 而 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$，并且

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = (\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0.$$

所以 CH 垂直于 AB（前提是 $H \neq C$，这样 CH 才是一条真正的直线；若 $H = C$，这个命题便没有内容）。推论至此完成。



上图显示最后一部分的情况：A、B、C 位于以原点 O 为圆心的圆上，三条高线（altitude）（琥珀色）都通过 H，而 O、G、H 共线，且 $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$。

验算

- 取 $A = (3,4)$、$B = (-4,3)$、$C = (0,-5)$，三点与 O 的距离都是 5。于是 $H = (-1,2)$，而 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4)(4) + (-2)(-8) = 0$；另外两个纯量积也是 0。形心为 $G = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$，即 H 的三分之一。
- 数值方面，对大约 2000 个顶点为整数点的随机三角形，以分数精确计算出的两条中线交点总是 $\frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$，并且位于第三条中线上；另外，对 1000 个内接于以 O 为圆心的圆的随机三角形，关于 H 的三个纯量积全部为零。

常见错误

- 证明了两条中线都通过 G，却没有说明它们为何不可能是同一条直线。只要用一句话指出 A、B、C 不共线，问题便解决了。
- 把 $\overrightarrow{OH} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 当作 AH 的方向。正确的方向是 $\mathbf{h} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$。
- 以为这个结果对所有三角形都成立。题目的假设迫使 O 与 A、B、C 等距；若原点是任意选取的，H 便不是垂心（orthocentre）。

STEP 之外

最后一部分证明了三角形的三条高线共点（concurrent）：把原点放在外心（circumcentre）O（与各顶点等距），则点 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 同时位于三条高线上。由于 $\mathbf{h}=3\mathbf{g}$，这也证明了外心、形心和垂心位于同一条直线上，这条直线称为欧拉线（Euler line），且 $OG:GH=1:2$。这种向量式的几何，由不依赖坐标的恒等式担起主要工作，正是大学一年级线性代数（linear algebra）处理几何的方式；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）对此有详细阐述，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则提供更多 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。