详细解答

STEP I 2004，第 5 题

纯数学 • 模 5 的剩余

> **STEP I 2004，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q5

关键思路

这五个等差数列（arithmetic progression）把正整数按除以 5 的余数（remainder）分成五类。只要为每一类写出像 $5n-3$ 这样的通项（general term），就可以把和与平方展开，再抽出因子 5，从而追踪它们落在哪一类。这样便能完全掌握平方数可以落在哪些类别，而两个“不可能”的证明都由此而来：等式右边落在一个左边永远到不了的类别。

解答

通项

每个数列的公差（common difference）都是 5，所以对 $n=1,2,3,\ldots$，第 n 项分别是

$$A:\ 5n-4, \qquad B:\ 5n-3, \qquad C:\ 5n-2, \qquad D:\ 5n-1, \qquad E:\ 5n.$$

（代入 $n=1$，可验证每条式子都给出题目所列的首项。）因此，一个正整数属于 A、B、C、D 或 E，当且仅当它除以 5 的余数分别是 1、2、3、4 或 0。

B 的一项与 C 的一项之和

任取 B 的一项 $5m-3$ 和 C 的一项 $5n-2$，其中 $m,n\geq 1$。那么

$$(5m-3)+(5n-2)=5m+5n-5=5(m+n-1).$$

由于 $m+n-1\geq 1$ 是正整数，这就是 E 的第 $(m+n-1)$ 项，正如所求。

B 和 C 各项的平方

对 B 的一项 $5m-3$,

$$\begin{aligned}(5m-3)^2 &= 25m^2-30m+9\\ &= 5(5m^2-6m+2)-1.\end{aligned}$$

这里 $k=5m^2-6m+2$ 是整数，而且对所有 $m\geq 1$ 都有 $k=5m^2-6m+2=m(5m-6)+2\geq 1$（当 $m=1$ 时它等于 1；当 $m\geq 2$ 时 m 和 $5m-6$ 都是正数）。所以 $(5m-3)^2=5k-1$ 是 D 的第 k 项。B 中每一项的平方都属于 D。

关于 C 的类似命题是：*C 中每一项的平方也是 D 的一项*。事实上，对 C 的一项 $5m-2$,

$$\begin{aligned}(5m-2)^2 &= 25m^2-20m+4\\ &= 5(5m^2-4m+1)-1,\end{aligned}$$

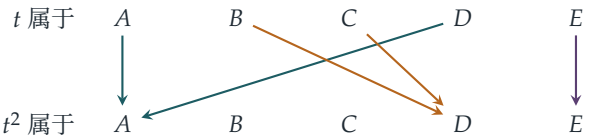
而且当 $m\geq 1$ 时 $k=5m^2-4m+1=m(5m-4)+1\geq 2$。所以 $(5m-2)^2$ 是 D 的第 k 项。

想一想 A、D 和 E 各项的平方又会落在哪里?

第 (i) 和第 (ii) 部分都要用到这个结果，所以值得用同样的方法处理余下三类：

$$\begin{aligned}(5m-4)^2 &= 25m^2-40m+16 = 5(5m^2-8m+4)-4 && \text{（属于 } A\text{）,}\\ (5m-1)^2 &= 25m^2-10m+1 = 5(5m^2-2m+1)-4 && \text{（属于 } A\text{）,}\\ (5m)^2 &= 5(5m^2) && \text{（属于 } E\text{）.}\end{aligned}$$

当 $m\geq 1$ 时，括号内的都是正整数（例如 $5m^2-8m+4=m(5m-8)+4\geq 1$，以及 $5m^2-2m+1\geq 4$）。所以平方运算把各类对应如下：



特别要留意，*没有完全平方数（perfect square）属于 B 或 C*：每个正的平方数都属于 A、D 或 E。

第 (i) 部分

假设正整数 x 和 y 满足 $x^2+5y=243\,723$。由于 $243\,723=5\times 48\,744+3$，等式右边是 C 的一项 $5\times 48\,745-2$。于是

$$x^2=243\,723-5y=5(48\,745-y)-2.$$

这个数是正数（它等于 x^2），所以 $48\,745 - y$ 是正整数，而 x^2 是 C 的一项。但我们已证明没有平方数属于 C。这个矛盾（contradiction）说明这样的正整数 x 和 y 并不存在。

第 (ii) 部分

四次方（fourth power）就是平方的平方。平方数 x^2 属于 A、D 或 E；把 A 或 D 的一项平方，得到 A 的一项，而把 E 的一项平方，则得到 E 的一项。所以对任何正整数 x，

$$x^4 \text{ 属于} A \text{ 或} E, \quad \text{也就是说，} \quad x^4 \text{ 的余数是1 或0，这里的除数是5.}$$

y^4 也是如此，所以 $2y^4$ 的余数是 2 或 0。两者相加，$x^4 + 2y^4$ 除以 5 的余数等于以下其中一个数的余数：

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 0 + 2 = 2, \qquad 0 + 0 = 0,$$

所以 $x^4 + 2y^4$ 属于 C、A、B 或 E，而永远不会属于 D。

> ? **想一想** 为甚么可以直接把余数相加?

如果 $x^4 = 5a + r$ 而 $2y^4 = 5b + s$，那么 $x^4 + 2y^4 = 5(a + b) + (r + s)$，所以这个和与 $r + s$ 相差 5 的倍数，与 $r + s$ 属于同一类。这正是上面计算 $B + C$ 时所做的运算，只是写成了一般形式。

现在 $26\,081\,974 = 5 \times 5\,216\,395 - 1$ 的末位数字是 4，所以它是 D 的一项。因此，对任何正整数 x 和 y，它都不可能等于 $x^4 + 2y^4$，正如所求。

验算

- 小数值的例子：$2^2 = 4$、$7^2 = 49$ 和 $12^2 = 144$ 的末位数字都是 4 或 9，所以属于 D；$3^2 = 9$、$8^2 = 64$、$13^2 = 169$ 亦然。
- 四次方：$1, 16, 81, 256, 625, 1296$ 的末位数字都是 1、6 或 5，所以属于 A 或 E。
- 用电脑搜索所有 $x \le \sqrt{243\,723} \approx 493.7$，找不到任何 x 使 $243\,723 - x^2$ 是 5 的正倍数；再搜索所有满足 $x^4 < 26\,081\,974$ 的 x（即 $x \le 71$），也找不到任何 y 使 $2y^4 = 26\,081\,974 - x^4$。

常见错误

- 把 E 的通项写成 $5n + 5$、把 A 的通项写成 $5n + 1$ 并无不可，但这时 n 要由 0 开始；把两种写法混在一起用，项数就会差了一项。

- 在第 (i) 部分，忘记利用 $x^2 > 0$ 来说明 $48\,745 - y$ 是正整数；少了这一步，x^2 就不一定是 C 的一项，因为这些数列只包含正整数。
- 在第 (ii) 部分，只处理 x^4，却忘记因子 2 会把 y^4 的余数由 1 变成 2。

STEP 之外

这五个数列就是模 5 的剩余类（residue classes），而整道题目其实是 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 中的算术：那里的平方数是 $0, 1, 4$（即二次剩余（quadratic residues）），四次方则是 $0, 1$，这正是费马小定理（Fermat's little theorem）的一个例子：当 $5 \nmid a$ 时 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$。要证明一条丢番图方程（Diophantine equation）无解，首选的工具就是选一个合适的数，把方程对它取模。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 对同余（congruences）和二次剩余有十分精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。