详细解答

STEP I 2004，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 2004，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q4

关键思路

每当见到 $\sqrt{x^2-1}$，就应该想起恒等式（identity）$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$：设 $x = \sec t$，平方根便化为 $\tan t$，而由于 $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$，这个 $\tan t$ 亦会一并约去。第 (ii) 和第 (iii) 部分看似不同，但只要对根号内的式子配方（completing the square），两者都会化成同一个形状 $\sqrt{u^2 - a^2}$，其中 $u = x + 2$，而根号外的因子 $x + 2$ 正是这个代换（substitution）所需要的。

解答

导数

把 $\sec t = (\cos t)^{-1}$ 写出，再用链式法则（chain rule），得

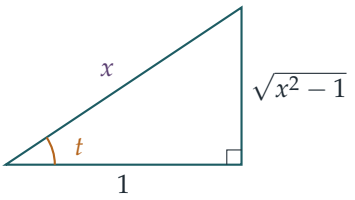
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sec t = -(\cos t)^{-2} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \sec t \tan t.$$

第 (i) 部分

设 $x = \sec t$，于是 $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$。当 $x = \sqrt{2}$ 时，$\cos t = 1/\sqrt{2}$，$t = \frac{\pi}{4}$；当 $x = 2$ 时，$\cos t = \frac{1}{2}$，$t = \frac{\pi}{3}$。对于 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ 内的 t，我们有 $\tan t > 0$，所以

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\tan^2 t} = \tan t$$

（无须加上绝对值符号）。下面的三角形显示的是同一回事：斜边为 x，邻边为 1，所以对边是 $\sqrt{x^2 - 1}$。



积分变成

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{8} + \frac{\pi}{24},\end{aligned}$$

其中用到 $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$、$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$。这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

想一想 第 (ii) 部分里并没有 $\sqrt{x^2-1}$。第 (i) 部分可以怎样帮得上忙?

把根号内的式子展开，然后配方：

$$(x+1)(x+3) = x^2+4x+3 = (x+2)^2 - 1.$$

所以设 $u = x+2$（而 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$），积分便是

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u.$$

被积函数（integrand）只在 $u^2 > 1$ 时才有定义。先考虑 $u > 1$（即 $x > -1$），并设 $u = \sec t$，其中 $0 < t < \frac{\pi}{2}$，使得 $\tan t > 0$ 及 $\sqrt{u^2-1} = \tan t$。于是

$$\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C,$$

而由于 $\sec t = u$，我们有 $t = \operatorname{arcsec} u$（等价地，即 $\arccos(1/u)$）。因此，对于 $x > -1$，

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsec}(x+2) + C.$$

为求完整，被积函数在 $x < -3$ 时亦有定义，此时 $u < -1$。在这个情况下，设 $u = -v$，其中 $v > 1$：被积式 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$ 变成 $\dfrac{1}{(-v)\sqrt{v^2-1}}(-\mathrm{d}v) = \dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v$，其积分为 $\operatorname{arcsec} v$。两种情况都可以用

$$\operatorname{arcsec}|x+2| + C = \arccos\frac{1}{|x+2|} + C,$$

来概括，而两个区间上的常数可以不同。

第 (iii) 部分

再次配方：

$$x^2+4x-5=(x+2)^2-9,$$

所以设 $u=x+2$ 后，我们需要求 $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,\mathrm{d}u$。这一次自然的代换是 $u=3\sec t$，这样选是为了令 $u^2-9=9\tan^2 t$。对于 $u>3$（即 $x>1$），取 $0<t<\frac{\pi}{2}$，于是 $\sqrt{u^2-9}=3\tan t$，而 $\mathrm{d}u=3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$。于是

$$\int \frac{3\sec t\tan t}{3\sec t\cdot 3\tan t}\,\mathrm{d}t=\int \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t=\frac{t}{3}+C,$$

而 $\sec t=u/3$。因此，对于 $x>1$，

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x+2}{3}+C.$$

与第 (ii) 部分完全一样，$x<-5$ 的情况（此时 $u<-3$）可用 $u=-v$ 处理，而两个区间都可以用 $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}(\frac{1}{3}|x+2|)+C$ 来概括。

验算

- 对第 (i) 部分的积分使用辛普森法则（Simpson's rule），得 0.0974060…，与 $\frac{1}{8}(\sqrt{3}-2)+\frac{\pi}{24}$ 吻合。
- 对答案求导：当 $u>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{arcsec}u=\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$（设 $u=\sec t$，并使用开首求得的导数）。例如，第 (ii) 部分的被积函数的 $\int_0^3$ 数值上是 0.322241，而 $\operatorname{arcsec}5-\operatorname{arcsec}2=\arccos\frac{1}{5}-\frac{\pi}{3}$ 与之相符。
- 第 (iii) 部分应该是第 (ii) 部分经过缩放后的版本：设 $u=3w$，则 $\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-9}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{w^2-1}}$，这就解释了因子 $\frac{1}{3}$ 的由来。

常见错误

- 在第 (i) 部分忘记更改积分上下限，或把上下限弄反：$\sec t=\sqrt{2}$ 给出 $t=\frac{\pi}{4}$，而不是 $\frac{\pi}{3}$。
- 写下 $\sqrt{\tan^2 t}=\tan t$，却没有检查 $\tan t$ 在所用范围内的正负号。
- 在第 (iii) 部分代入 $u=\sec t$ 而不是 $u=3\sec t$，结果剩下 $\sqrt{\sec^2 t-9}$，没有恒等式可以把它化简。

STEP 之外

反正割函数（inverse secant）只是一个家族的其中一员：代换 $x = a\sin t$, $a\tan t$, $a\sec t$（或它们的双曲函数（hyperbolic function）近亲 $a\sinh t$, $a\cosh t$）可以驯服 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ 和 $\sqrt{x^2 - a^2}$，而配方可以把任何 $\sqrt{\text{二次式}}$ 化为其中一种。在正负号上，以及在原函数（antiderivative）定义于哪个区间上所需要的谨慎，正是初尝分析（analysis）课程如何令积分变得严谨的滋味。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）严格地处理了代换定理（substitution theorem），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题集）则有更多同类风格的 STEP 积分题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。