详细解答

STEP I 2004，第 3 题

纯数学 · 二元多项式的因式分解

STEP I 2004，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q3

关键思路

二元多项式（polynomial in two variables）可以看成只含其中一个变量的多项式，而系数则含有另一个变量。把它看成 x 的多项式时，因式定理（factor theorem）依然适用，长除法（long division）依然适用，而 x 的二次式只要判别式（discriminant）是完全平方（perfect square），就依然可以因式分解（factorise）。在第 (ii) 部分，x 的首项系数（leading coefficient）本身是 y 的一次式，这暗示其中一个因式只含 y。

解答

第 (i) 部分

把式子 $(*)$ 按 x 的幂次整理：

$$P(x) = x^3 + (2y-5)x^2 + (y^2 - 8y + 6)x + (6y - 3y^2).$$

代入 $x = 3$，

$$\begin{aligned} P(3) &= 27 + 9(2y-5) + 3(y^2 - 8y + 6) + 6y - 3y^2 \\ &= (27 - 45 + 18) + (18y - 24y + 6y) + (3y^2 - 3y^2) = 0 \end{aligned}$$

对任何 y 都成立，所以根据因式定理，$x - 3$ 是一个因式，正如题目所求。

要找出另一个因式，设 $P(x) = (x-3)(x^2 + px + q)$，其中 p 和 q 可以与 y 有关。展开右边得 $x^3 + (p-3)x^2 + (q-3p)x - 3q$，再比较系数（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned} x^2: &\quad p - 3 = 2y - 5, && \text{所以} p = 2y - 2, \\ x^0: &\quad -3q = 6y - 3y^2, && \text{所以} q = y^2 - 2y, \end{aligned}$$

而 x 的系数亦吻合：$q-3p=y^2-8y+6$，与应有的结果一致。所以二次因式是

$$x^2+(2y-2)x+y^2-2y=(x^2+2xy+y^2)-2(x+y)=(x+y)(x+y-2).$$

想一想 我们是怎样看出这个二次式可以因式分解的?

$x^2+2xy+y^2$ 这几项合起来是完全平方 $(x+y)^2$，而余下的项 $-2x-2y$ 是 $x+y$ 的倍数。（如果一时看不出这个分组方法，可以计算 x 的判别式：$(2y-2)^2-4(y^2-2y)=4$，是完全平方，所以根是 $x=-y+1\pm1$，即 $x=-y$ 和 $x=2-y$。）因此

$$(*)=(x-3)(x+y)(x+y-2),$$

所以 $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=-2$（或者把两个因式对调：$a=1$, $b=-2$, $c=1$, $d=0$）。

第 (ii) 部分

把这个式子称为 Q，同样按 x 的幂次整理：

$$Q=(y+2)x^2+(12-4y-5y^2)x+(6y^3-y^2-21y+10).$$

x^2 的系数是 $y+2$。如果 Q 是三个一次因式的积，x^2 项就来自其中两个因式含 x 的部分，所以很自然会问：$y+2$ 能否整除整个式子？设 $y=-2$：

$$12+8-20=0,\qquad -48-4+42+10=0,$$

所以余下两个系数在 $y=-2$ 时都等于零，根据（关于 y 的）因式定理，两者都可被 $y+2$ 整除：

$$\begin{aligned}12-4y-5y^2&=-(5y^2+4y-12)=-(y+2)(5y-6),\\ 6y^3-y^2-21y+10&=(y+2)(6y^2-13y+5).\end{aligned}$$

另外 $6y^2-13y+5=(2y-1)(3y-5)$。因此

$$Q=(y+2)[x^2-(5y-6)x+(2y-1)(3y-5)].$$

想一想 方括号内的式子可以因式分解吗？我们怎样判断?

它关于 x 的判别式是

$$\begin{aligned}(5y-6)^2-4(2y-1)(3y-5)&=25y^2-60y+36-(24y^2-52y+20)\\&=y^2-8y+16=(y-4)^2,\end{aligned}$$

是完全平方，所以可以分解。更快捷的做法是留意 $(2y-1)+(3y-5)=5y-6$，所以积为 $(2y-1)(3y-5)$、和为 $5y-6$ 的两个数就是 $2y-1$ 和 $3y-5$，由此得根 $x=2y-1$ 和 $x=3y-5$。因此

$$Q=(y+2)(x-2y+1)(x-3y+5).$$

验算

- 在第 (i) 部分代入 $x = y = 1$：$(*)$ 给出 $1-5+2+1-8-3+6+6 = 0$，而 $(1-3)(2)(0) = 0$。取 $x = 2$，$y = 1$：$(*)$ 给出 $8-20+8+2-16-3+12+6 = -3$，而 $(-1)(3)(1) = -3$。
- 在第 (ii) 部分代入 $x = y = 0$：$Q = 10$，而 $(2)(1)(5) = 10$。取 $x = 1$，$y = 1$：$Q = 6-1-21+2+12-4+1-5+10 = 0$，而的确 $x - 2y + 1 = 0$。
- 我们在 2000 个随机点 (x, y) 上以精确的有理数运算核对了两个因式分解，每次结果都一致。

常见错误

- 把式子看成 x 的多项式，却忘记“常数”项是指所有不含 x 的项，在第 (i) 部分即 $6y - 3y^2$。
- 在第 (ii) 部分，尝试找一个根 $x = k$，其中 k 是一个数：形如 $x - k$ 的因式并不存在。应该先找出的，是不含 x 的因式 $y + 2$。
- 把 $-(5y^2 + 4y - 12)$ 除以 $y + 2$ 时出现正负号错误；应展开验算。

STEP 之外

多元多项式构成一个环（ring），而 $\mathbb{Z}[x, y]$ 可以看成 $(\mathbb{Z}[y])[x]$：即系数是 y 的多项式的 x 的多项式。这正是我们刚才的做法，亦是因式定理和除法依然适用的原因。这些环具有唯一分解性质（unique factorisation）（高斯引理，Gauss's lemma），所以我们找到的因式分解，除了次序和正负号之外是唯一的。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）详细阐述了这些概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。