详细解答

STEP I 2004，第 2 题

纯数学 · 下取整函数的积分

> **STEP I 2004，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q2

关键思路

函数 $[x]$ 在每个区间 $r \le x < r+1$ 上都是常数，所以凡是由它构成的函数都是阶梯函数（step function）。对阶梯函数求积分，不过是把一个个长方形的面积加起来：在各整数处把 $[0, a]$ 分段，在每一段单位长度的区间上，被积函数（integrand）都是常数。当 a 不是整数时，唯一的新情况是最后多了一个较窄的长方形。

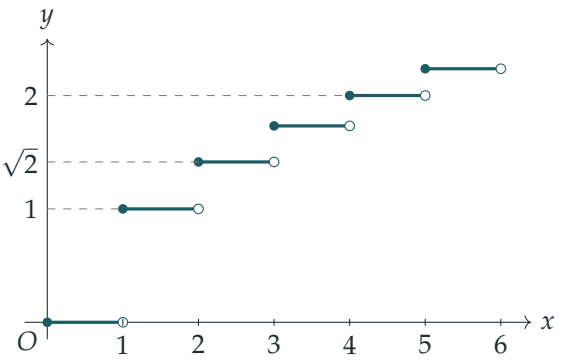
解答

第 (i) 部分

对于 $x \ge 0$，设 $r = [x]$。那么 r 是非负整数，且 $r \le x < r+1$，所以在该区间上

$$y = \sqrt{[x]} = \sqrt{r}.$$

因此图像呈阶梯状：在 $[0,1)$ 上 $y = 0$，在 $[1,2)$ 上 $y = 1$，在 $[2,3)$ 上 $y = \sqrt{2}$，如此类推。每一级都包含左端点（实心点），但不包含右端点（空心点），因为 $[x]$ 恰好在每个整数处向上跳升。由于 $\sqrt{r+1} - \sqrt{r} = 1/(\sqrt{r+1} + \sqrt{r})$ 递减，各级升高的幅度愈来愈小。对于 $x < 0$，我们有 $[x] \le -1$，所以 $\sqrt{[x]}$ 在该处没有定义，图像只在 $x \ge 0$ 的范围内出现。



现设 a 为正整数。在整数 $1, 2, \ldots, a-1$ 处把积分范围分段：

$$\int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x.$$

在 $r \le x < r+1$ 上，被积函数等于常数 $\sqrt{r}$。（在 $x = r+1$ 这一点上它取另一个值，但改变函数在一点上的值并不会改变其积分。）所以每一段都是一个阔度为 1、高度为 $\sqrt{r}$ 的长方形的面积：

$$\int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sqrt{r}, \qquad \text{因此} \qquad \int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \sqrt{r},$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

完全相同的论证也适用于 $2^{[x]}$，它在 $r \le x < r+1$ 上等于 2^r。对于正整数 a，

$$\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} 2^r\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} 2^r = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{a-1}.$$

这是一个等比级数（geometric series），首项为 1，公比为 2，共有 a 项，所以其和为

$$\frac{2^a - 1}{2 - 1} = 2^a - 1,$$

这就是所求的结果。

第 (iii) 部分

现设 $a > 0$ 不是整数，并令 $n = [a]$，那么 n 是整数，且 $n < a < n+1$ 及 $n \ge 0$。

? **想一想** 积分到了哪里，就不再是若干个完整单位长方形之和?

直到 $x = n$ 为止，一切都与第 (ii) 部分相同；余下的一段是 $n \le x \le a$，这是一条阔度为 $a - n$ 的窄条，完全位于同一级之内，其上 $[x] = n$。（若 $n = 0$，第一段是空的，其贡献为 $2^0 - 1 = 0$，所以同一条公式仍然适用。）因此

$$\begin{aligned}\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x &= \int_0^n 2^{[x]}\,\mathrm{d}x + \int_n^a 2^n\,\mathrm{d}x \\ &= (2^n - 1) + (a - n)\,2^n \\ &= 2^{[a]}(1 + a - [a]) - 1.\end{aligned}$$

验算

- 若 $0 < a < 1$，则 $[a] = 0$，公式给出 $1 \cdot (1 + a) - 1 = a$：正确，因为被积函数在 $[0, a]$ 上等于 1。
- 当 a 从下方趋近整数 m 时，$[a] = m - 1$，公式趋向 $2^{m-1} \cdot 2 - 1 = 2^m - 1$，与第 (ii) 部分吻合。所以这个积分是 a 的连续函数（continuous function）；任何有界函数（bounded function）的积分，作为其积分上限的函数，都必定如此。
- 以数值验算，取 $a = 2.5$，公式给出 $4 \times 1.5 - 1 = 5$，而用中点法则（midpoint rule）计算该积分，同样得出 5.000。至于第 (i) 部分，取 $a = 5$，两边都是 $0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 \approx 6.1463$。

常见错误

- 由 $r = 1$ 加到 a，而不是由 $r = 0$ 加到 $a - 1$：在 $[r, r + 1)$ 上，高度是 $\sqrt{r}$，即左端点处的值。
- 在第 (iii) 部分，遗漏了那条不完整的窄条，或把它的阔度当作 1 而不是 $a - [a]$。
- 用垂直线把各级连起来，或在两端都画上实心点：下取整函数（floor function）在整数处并不连续。

STEP 之外

把长方形面积相加来求阶梯函数的积分，正是大学里建立黎曼积分（Riemann integral）的方法：先为阶梯函数定义积分，然后用阶梯函数从上方和下方把一般的函数夹住。第 (i) 部分也是比较求和与积分的第一步，由此可得出诸如 $\sum_{r=1}^{n} \sqrt{r} \approx \frac{2}{3} n^{3/2}$ 的估计。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门教科书）就是以这种方式建立黎曼积分的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。