详细解答

STEP I 2004，第 14 题

概率与统计 • 排列的计数

STEP I 2004，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q14

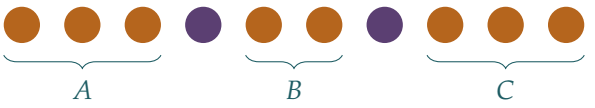
关键思路

想像把整个宝箱里的硬币逐枚取出，排成一行。海盗其实只是在两枚铅币的位置把这一行切开：第一个海盗得到第一枚铅币之前的金币，第二个海盗得到两枚铅币之间的金币，第三个海盗得到第二枚铅币之后的金币。硬币的每一种排列次序出现的可能性都相同，所以整个问题归结为数算两枚铅币可以落在哪些位置。

解答

设想全部 $n+2$ 枚硬币按随机次序逐一抽出，尽管第三个海盗实际上只是把剩下的一手捞走。这并不改变谁得到哪些硬币。抽取是随机的，所以从 $n+2$ 个位置中为铅币选出两个位置的 $\binom{n+2}{2}$ 种选法，每一种的可能性都相同。

设 A、B 和 C 分别为第一、第二和第三个海盗取得的金币数目。那么 $A+B+C=n$，而这一行硬币看起来是这样的：



图中琥珀色的是金币，紫红色的是铅币。铅币的位置决定了 (A,B,C)，而每一个满足 $A+B+C=n$ 的非负整数三元组，都恰好来自一种位置选法。所以这 $\binom{n+2}{2}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个三元组 (A,B,C) 的可能性全部相同。

第 (i) 部分

第一个海盗得不到金币，当且仅当 $A=0$，即抽出的第一枚硬币就是铅币。由于 $n+2$ 枚硬币中每一枚最先被抽出的可能性都相同，这个事件的概率（probability）是 $\frac{2}{n+2}$。因此

$$\mathrm{P}(A\geq 1)=1-\frac{2}{n+2}=\frac{n}{n+2}.$$

（用数算的方法也得到相同答案：$A=0$ 时余下 $B+C=n$，它有 $n+1$ 个解，而 $(n+1)\big/\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{2}{n+2}$。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 第二个海盗是在一个随机的时刻才开始抽的。她的处境真的不比第一个海盗差吗?

是的，她的处境并不较差。我们数算 $B=0$ 的三元组：这时 $A+C=n$，它有 $n+1$ 个解，与第 (i) 部分完全一样。所以

$$\mathrm{P}(B\geq 1)=1-\frac{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+2}.$$

事实上，由于所有三元组 (A,B,C) 的可能性都相同，三人所得的份额是*可交换的*（exchangeable）：每个海盗得到金币的机会都同样是 $\frac{n}{n+2}$，连第三个海盗也不例外。

第 (iii) 部分

我们需要 A、B 和 C 全部至少为 1。设 $A=A'+1$、$B=B'+1$ 和 $C=C'+1$。于是我们想要的三元组就对应于 $A'+B'+C'=n-3$ 的非负整数解。根据隔板法（stars and bars），这样的解共有 $\binom{n-1}{2}$ 个，这一点也可以直接看出：在相邻金币之间的 $n-1$ 个空隙中，选出两个来放铅币。因此，对于 $n\geq 1$，

$$\mathrm{P}(A\geq 1,\ B\geq 1,\ C\geq 1)=\frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n+2}{2}}=\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}.$$

当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，这个概率是 0，这是必然的，因为金币不足三枚时，三个海盗不可能人人都有金币。（当 $n=0$ 时，概率显然是 0；公式在这里并不适用，因为 $\binom{n-1}{2}$ 所数算的空隙根本不存在。）

验算

- 当 $n=1$ 时，硬币的排列有 GLL、LGL 和 LLG 三种，可能性全部相同。第一个海盗只在 GLL 中得到金币，其概率为 $\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$；第二个海盗只在 LGL 中得到金币，概率同样是 $\frac{1}{3}$。

- 当 $n = 3$ 时，唯一合乎要求的排列是 GLGLG，它是 $\binom{5}{2} = 10$ 种排列中的一种，而公式给出 $\frac{2\cdot 1}{4\cdot 5} = \frac{1}{10}$。
- 对 $n = 1, \ldots, 14$ 逐一穷举，结果与三条公式全部吻合。以 $n = 5$ 模拟 2×10^5 个宝箱，得出 0.715、0.714 和 0.286，而理论值分别为 $\frac{5}{7} \approx 0.714$、$\frac{5}{7}$ 和 $\frac{12}{42} = \frac{2}{7} \approx 0.286$。

常见错误

- 把第二个海盗的抽取当作从一个装满的宝箱重新开始。留给她的金币有多少，取决于第一个海盗抽得怎样。
- 在第 (iii) 部分把 $\mathrm{P}(A \geq 1)$、$\mathrm{P}(B \geq 1)$ 和 $\mathrm{P}(C \geq 1)$ 相乘。各人的份额并非独立（independent），因为它们的总和必须是 n。

STEP 之外

铅币位置与 $A + B + C = n$ 的解之间的对应，就是“隔板法”的双射（bijection）。它说明了随机放置的标记之间的间隔是可交换的。它的连续版本，是把点均匀地投在一根棒上，由此引出均匀间距（uniform spacings）理论和狄利克雷分布（Dirichlet distribution），而这类次序统计量（order statistics）在大学一年级的概率论中随处可见。Blitzstein 与 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）对这种数算方法以及相关的对称性论证，都有十分出色的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。