详细解答

STEP I 2004，第 12 题

概率与统计 • 贝叶斯定理

STEP I 2004，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q12

关键思路

从第 1 组抽出的样本，大致告诉我们：已知一块晶片属于第 1 组，它来自机器 A 的条件概率（conditional probability）是多少。因此，我们利用贝叶斯定理（Bayes′ theorem），以 λ、p 和 q 表示这个条件概率，令它等于观察所得的比例，再解出 λ。分拣出错只改变了每部机器所生产的晶片落入第 1 组的概率；方法则完全相同。

解答

从工厂的产品中随机抽出一块晶片。设 A 为该晶片由机器 A 制造的事件（故 $\mathrm{P}(A) = \lambda$ 及 $\mathrm{P}(A') = 1 - \lambda$），$P$ 为该晶片完美无瑕的事件，G 为该晶片被放入第 1 组的事件。题目给出 $\mathrm{P}(P \mid A) = p$ 及 $\mathrm{P}(P \mid A') = q$。

从第 1 组随机抽出的一块晶片，就是在 G 发生的条件下，从全部产品中随机抽出的一块晶片。由于样本很大，观察所得的比例 $\frac{2}{5}$ 是 $\mathrm{P}(A \mid G)$ 的良好估计，而我们对 λ 的估计值，就是使 $\mathrm{P}(A \mid G)$ 恰好等于 $\frac{2}{5}$ 的那个值。

分拣完全准确

此时 G 与 P 是同一事件。根据贝叶斯定理，

$$\mathrm{P}(A \mid P) = \frac{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(P \mid A')\,\mathrm{P}(A')} = \frac{\lambda p}{\lambda p + (1-\lambda)q}.$$

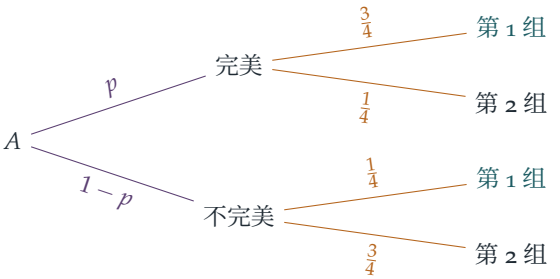
令上式等于 $\frac{2}{5}$，然后交叉相乘（分母为正数）：

$$\begin{aligned} 5\lambda p &= 2\lambda p + 2(1-\lambda)q \\ 3\lambda p + 2\lambda q &= 2q \\ \lambda &= \frac{2q}{3p+2q}, \end{aligned}$$

这就是所求的估计值，因为 $3p + 2q > 0$。

分拣出错

现在，一块晶片进入第 1 组有两种途径：本身完美而被正确分拣，或本身不完美而被错误分拣。我们假设分拣出错与晶片由哪部机器制造互相独立（independent），也就是说，在已知晶片是否完美的情况下，它如何被分拣与它来自哪部机器无关。下面的树形图显示来自机器 A 的晶片的各个分支；机器 B 的情况相同，只需把 p 换成 q。



把通往第 1 组的两个分支相加，

$$\mathrm{P}(G \mid A) = \tfrac{3}{4}p + \tfrac{1}{4}(1-p) = \frac{1+2p}{4}, \qquad \mathrm{P}(G \mid A') = \tfrac{3}{4}q + \tfrac{1}{4}(1-q) = \frac{1+2q}{4}.$$

于是，再次运用贝叶斯定理（因子 $\frac{1}{4}$ 互相约去），

$$\mathrm{P}(A \mid G) = \frac{\lambda(1+2p)}{\lambda(1+2p) + (1-\lambda)(1+2q)}.$$

想一想 证据有没有改变？$\frac{2}{5}$ 还应该沿用吗？

应该沿用：样本确实是从第 1 组抽出的，而其中确实有 $\frac{2}{5}$ 来自机器 A。改变了的，只是我们对晶片如何进入第 1 组所建立的模型。因此，我们令 $\mathrm{P}(A \mid G)$ 的新表达式等于 $\frac{2}{5}$：

$$\begin{aligned} 5\lambda(1+2p) &= 2\lambda(1+2p) + 2(1-\lambda)(1+2q) \\ \lambda\big[3(1+2p) + 2(1+2q)\big] &= 2(1+2q) \\ \lambda &= \frac{2(1+2q)}{5+6p+4q}. \end{aligned}$$

这就是 λ 的新估计值。留意它其实就是第一个答案，只是把 p 和 q 分别换成 $\frac{1+2p}{4}$ 和 $\frac{1+2q}{4}$，即进入第 1 组的新概率。

验算

- 若 $p = q$，两部机器在品质上无从分辨，因此第 1 组的组成应与整体产量的比例一致，而 λ 应为 $\frac{2}{5}$。两条公式都给出这个结果：$\frac{2p}{5p} = \frac{2}{5}$ 及 $\frac{2(1+2p)}{5+10p} = \frac{2}{5}$。
- 两个估计值都严格介乎 0 与 1 之间，因为两者的分子均为正数，且小于分母。
- 以 $\lambda = 0.3$、$p = 0.6$、$q = 0.8$ 及分拣出错的情况模拟 4×10^5 块晶片，结果第 1 组中有 0.2667 来自机器 A，而公式给出的数值是 0.2661；把模拟所得的比例代入公式反过来求解，得回 $\lambda \approx 0.301$。

常见错误

- 令 $\frac{2}{5}$ 等于 $\mathrm{P}(G \mid A)$ 或 λp，而不是等于条件概率 $\mathrm{P}(A \mid G)$。
- 在第二部分，忘记了被错误放入第 1 组的不完美晶片，即只用了 $\frac{3}{4}p$。

STEP 之外

选取能使观察所得数据“完全吻合”的参数值，这种做法称为*矩估计法*（method of moments）；在本题中，它与最大似然估计（maximum likelihood estimation）的结果一致，而后者你会在大学的第一门统计学课程中遇到。出错的分拣机是量度误差（measurement error）的一个简单模型，这种误差又称错误分类（misclassification），在医学检测中是个严重的实际问题：假阳性（false positive）和假阴性（false negative）正是以这种方式扭曲观察所得的比例。想进一步了解贝叶斯定理和条件化，可参阅 Blitzstein 与 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。