详细解答

STEP I 2004，第 11 题

力学 · 摩擦力与铰接梯子

STEP I 2004，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q11

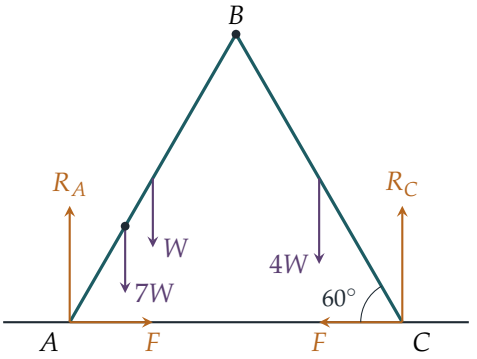
关键思路

在任何一处滑动之前，整个梯架处于平衡（equilibrium），所以我们可以由整个系统求出两个法向反作用力（normal reaction），再单独考虑其中一把梯子来求摩擦力（对铰链取力矩，便可消去未知的铰链力）。水平方向的外力只有两个摩擦力，所以它们大小相等。法向反作用力较小的那只梯脚，所需的比值 F/R 较大，因此最先滑动的就是那只梯脚。

解答

我们把每把梯子视为长度为 $2a$ 的均匀杆（uniform rod），把 B 处的铰链（hinge）视为光滑，并把装修工人视为质点（particle）。由于 $AB = BC$ 且 $\angle ABC = 60°$，三角形 ABC 是等边三角形：$AC = 2a$，而每把梯子与地面成 $60°$ 角。于是 B 与每只梯脚的水平距离为 a，离地面的高度为 $a\sqrt{3}$。

当装修工人沿 AB 爬到三分之一处时，她与 A 的水平距离为 $\frac{1}{3}a$。AB 的中心与 A 的水平距离为 $\frac{1}{2}a$，而 BC 的中心与 A 的水平距离为 $\frac{3}{2}a$。



法向反作用力

设 A 和 C 处的法向反作用力分别为 R_A 和 R_C。对整个系统沿铅垂方向分解力，得

$$R_A + R_C = W + 4W + 7W = 12W.$$

对整个系统以 A 为支点取力矩（moments）（铰链力是内力，所以不会出现）：

$$R_C \cdot 2a = W \cdot \tfrac{1}{2}a + 7W \cdot \tfrac{1}{3}a + 4W \cdot \tfrac{3}{2}a = \tfrac{53}{6}Wa,$$

所以

$$R_C = \tfrac{53}{12}W, \qquad R_A = 12W - \tfrac{53}{12}W = \tfrac{91}{12}W.$$

摩擦力

两只梯脚有向外张开的趋势，所以每只梯脚所受的摩擦力（friction）都指向内侧。对整个系统沿水平方向分解力，摩擦力是仅有的水平外力，所以两者大小相同；记这个大小为 F。

要求出 F，我们需要单独考虑其中一把梯子。取没有装修工人的 BC，并以 B 为支点取力矩，使未知的铰链力消失。以 B 为支点，反作用力 R_C 的力臂（lever arm）为 a，重量 $4W$ 的力臂为 $\frac{1}{2}a$，而摩擦力 F（水平方向，作用于地面的高度）的力臂为 $a\sqrt{3}$。重量和 F 使 BC 向一方转动，而 R_C 使它向另一方转动，所以

$$R_C \cdot a = 4W \cdot \tfrac{1}{2}a + F \cdot a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{R_C - 2W}{\sqrt{3}} = \frac{29W}{12\sqrt{3}}.$$

作为验算，对 AB 以 B 为支点作同样的计算，得 $R_A \cdot a = W \cdot \frac{1}{2}a + 7W \cdot \frac{2}{3}a + Fa\sqrt{3}$，所以 $F\sqrt{3} = \frac{91}{12}W - \frac{31}{6}W = \frac{29}{12}W$，与上面的结果一致。

哪一把梯子会滑动?

想一想 两只梯脚所受的摩擦力相同，那么我们怎样判断哪一只会先失守?

当所需的摩擦力等于 μ 乘以该处的法向反作用力时，梯脚便处于即将滑动的状态。两只梯脚所需的 F 相同，所以法向反作用力较小的梯脚所需的比值较大:

$$\frac{F}{R_A}=\frac{29}{91\sqrt{3}}\approx 0.184, \qquad \frac{F}{R_C}=\frac{29}{53\sqrt{3}}\approx 0.316.$$

所以 C 最先达到极限摩擦（limiting friction）：滑动的是**较重的梯子** BC，尽管装修工人是在 AB 上。她的重量把 A 牢牢压在地面上，而 C 所承受的负荷则少得多。

我们还应确定在此之前没有任何一处已经滑动。若她爬到全长的 t 倍处，同样的计算给出 $R_C=(\frac{13}{4}+\frac{7}{2}t)W$ 和 $F\sqrt{3}=R_C-2W=(\frac{5}{4}+\frac{7}{2}t)W$，所以

$$\frac{F}{R_C}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{5}{4}+\frac{7}{2}t}{\frac{13}{4}+\frac{7}{2}t}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{2}{\frac{13}{4}+\frac{7}{2}t}\right),$$

它随 t 递增。同样，F/R_A 也随 t 递增（它的分子上升，而分母 $R_A=12W-R_C$ 下降）。所以随着她向上爬，所需的比值不断增大，而第一次滑动恰好发生在 F/R_C 达到 μ 之时，即 $t=\frac{1}{3}$。因此

$$\mu=\frac{29}{53\sqrt{3}}=\frac{29\sqrt{3}}{159}\approx 0.316.$$

验算

- 对 AB 以 B 为支点取力矩，所得的 F 与对 BC 以 B 为支点取力矩所得的相同（见上文），所以各反作用力互相吻合。
- 完全没有装修工人时，由于 BC 较重，R_C 应大于 R_A；事实上，此时以 A 为支点取力矩得 $R_C=\frac{13}{4}W$ 和 $R_A=\frac{7}{4}W$，两者之和为 $5W$。
- 当 $t=\frac{11}{14}$ 时 $R_A=R_C$；只有超过这一点，滑动的才会是 AB，所以在 $t=\frac{1}{3}$ 时滑动的必定是 BC。
- 数值上，由坐标重新计算每一个力（并对两把梯子检查以 B 为支点的力矩），得 $\mu\approx 0.31591$。

常见错误

- 以为载着装修工人的那把梯子会滑动。她的重量增大了 A 处的法向反作用力，使那只梯脚更加稳固。

- 对单独一把梯子以梯脚为支点取力矩，这样会引入未知的铰链力。对一把梯子以 B 为支点取力矩便可避开它。
- 忘记摩擦力对铰链的力臂为 $a\sqrt{3}$（即 B 的高度）。

STEP 之外

这是处理铰接结构的静力学（statics）基本策略：先把整个结构当作一个整体来求外部反作用力，然后在某个接合处把它切开，求出其中一个构件必须提供的力。哪一个接触点最先失效这类问题，会引向框架的分析，以及虚功原理（principle of virtual work）；在虚功原理中，平衡是通过考虑符合约束条件的微小位移来求得的。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对刚体静力学和摩擦有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。