详细解答

STEP I 2004，第 10 题

力学 • 匀加速运动学

STEP I 2004，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

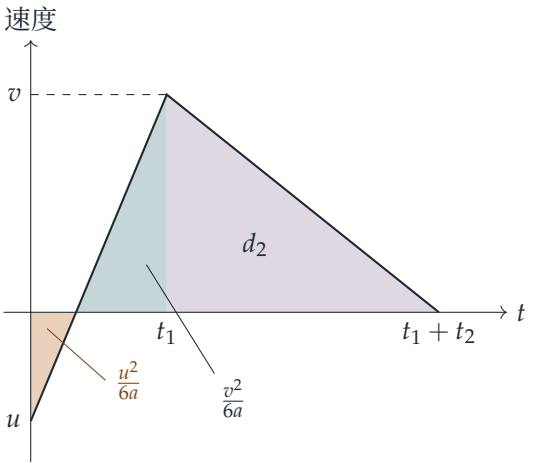
step.maths.org/questions/04-s1-q10

关键思路

这里全部都是匀加速运动（constant acceleration），所以单靠 $v^2 = u^2 + 2as$ 和 $v = u + at$ 便足以解决整条题目。唯一的陷阱是距离（distance）这个词。当 $u < 0$ 时，质点（particle）先向后运动，停下来，然后才向前加速，所以距离 d_1 是两段路程之和，而不是单一个位移（displacement）。画一幅速度—时间图（velocity–time graph）便一目了然：距离就是图线与时间轴之间的总面积，轴下方的面积也当作正数计算。

解答

取最终速度 v 的方向为正方向。在第一阶段，加速度是 $+3a$（它令速度由 u 上升至 $v > u$）；在第二阶段，加速度是 $-a$，直至速度变为 0。全程均有 $a > 0$。



上图所示为 $u < 0$ 的情况：轴下方的小三角形就是向后运动的那段路程。

第二阶段（两种情况皆适用）。 质点以减速度（deceleration）a 由速率 v 减至静止，期间从不掉头，所以

$$0 = v^2 - 2ad_2 \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{v^2}{2a}.$$

第 (i) 部分

若 $u > 0$，速度由 u 上升至 v，一直保持正值，所以距离等于位移：

$$v^2 = u^2 + 2(3a)d_1 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}.$$

因此

$$3d_1 = \frac{v^2 - u^2}{2a} < \frac{v^2}{2a} = d_2,$$

因为 $u^2 > 0$。所以 $3d_1 < d_2$，正如所求。

第 (ii) 部分

现在 $u < 0$，第一阶段要分成两段。

> ? **想一想** 为甚么不能再直接使用 $v^2 = u^2 + 6ad_1$?

这条公式给出的是位移，即 $\frac{v^2-u^2}{6a}$。但质点是先向后运动的。在加速度 $3a$ 之下，它由速率 $|u|$ 减慢至静止，走过 $\frac{u^2}{6a}$（由 $0 = u^2 - 2(3a)s$ 得出）。然后它由静止加速至 v，走过 $\frac{v^2}{6a}$。距离是两者之和：

$$d_1 = \frac{u^2 + v^2}{6a}, \qquad \text{所以} \qquad 3d_1 = \frac{u^2 + v^2}{2a}.$$

与 $d_2 = \frac{v^2}{2a}$ 和 $2d_2 = \frac{2v^2}{2a}$ 比较：

- $3d_1 - d_2 = \dfrac{u^2}{2a} > 0$，因为 $u \neq 0$；
- $2d_2 - 3d_1 = \dfrac{v^2 - u^2}{2a} > 0$，因为 $v > |u|$。

因此 $d_2 < 3d_1 < 2d_2$，正如所求。

平均速率

所需时间与方向无关。在第一阶段，速度以变率 $3a$ 改变了 $v - u$；在第二阶段，速度以变率 a 改变了 v，所以

$$t_1 = \frac{v - u}{3a}, \qquad t_2 = \frac{v}{a}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{4v - u}{3a},$$

不论 u 的正负如何。

$u > 0$ 的情况。总距离是 $\frac{v^2-u^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2-u^2}{6a}$，所以平均速率（average speed）是

$$S_+ = \frac{4v^2-u^2}{6a} \cdot \frac{3a}{4v-u} = \frac{4v^2-u^2}{2(4v-u)}.$$

$u < 0$ 的情况。设 $u = -w$，其中 $0 < w < v$。总距离是 $\frac{v^2+w^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2+w^2}{6a}$，所需时间是 $\frac{4v+w}{3a}$，所以

$$S_- = \frac{4v^2+w^2}{2(4v+w)}.$$

要比较这两个数，可把它们分别与 $\frac{1}{2}v$ 比较：

$$S_+ - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2-u^2-v(4v-u)}{2(4v-u)} = \frac{u(v-u)}{2(4v-u)},$$
$$S_- - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2+w^2-v(4v+w)}{2(4v+w)} = -\frac{w(v-w)}{2(4v+w)}.$$

在第一种情况中 $0 < u < v$，第一个式子的分子和分母皆为正数，所以 $S_+ > \frac{1}{2}v$。在第二种情况中 $0 < w < v$，第二个式子是负数，所以 $S_- < \frac{1}{2}v$。因此

$$S_- < \tfrac{1}{2}v < S_+,$$

即 $u > 0$ 时平均速率较大，正如所求。留意这个结论对两种情况中任何 $|u|$ 的值都成立，而不限于两者相等的时候：只要 v 和 a 相同，$\frac{1}{2}v$ 便把每一段 $u > 0$ 的旅程与每一段 $u < 0$ 的旅程分隔开。

验算

- 取 $v = 2$，$a = 1$。当 $u = 1$：$d_1 = \frac{1}{2}$，$d_2 = 2$，所以 $3d_1 = 1.5 < 2$，所需时间是 $\frac{7}{3}$，得出 $S_+ = \frac{2.5}{7/3} \approx 1.071 > 1$。当 $u = -1$：$d_1 = \frac{5}{6}$，所以 $2 < 3d_1 = 2.5 < 4$，所需时间是 3，得出 $S_- = \frac{17/6}{3} \approx 0.944 < 1$。以数值方法逐步模拟这个运动，也得出相同的数值。
- 极限（limit）：当 $u \to 0$ 或 $|u| \to v$ 时，两个平均速率都趋向 $\frac{1}{2}v$，这正是由静止起步、最后停下的简单旅程的平均速率。在容许范围的边界上，各个不等式也变成等式：在两个部分中，当 $u \to 0$ 时 $3d_1 \to d_2$；在第 (ii) 部分中，当 $u \to -v$ 时 $3d_1 \to 2d_2$。

常见错误

- 在第 (ii) 部分使用 $d_1 = \frac{v^2-u^2}{6a}$。这是位移，而且会再次得出 $3d_1 < d_2$，与题目要求证明的结果矛盾。

- 以为 $u < 0$ 时，时间也需要分段计算。其实不必：$v = u + 3at_1$ 在经过折返点前后一直成立。

STEP 之外

位移与距离之别，就是 $\int v\,\mathrm{d}t$ 与 $\int |v|\,\mathrm{d}t$ 之别。后者是路径的弧长（arc length），也就是汽车里程表所量度的数值。在大学的力学课程中，弧长成为描述弯曲轨迹的自然参数，由此引出加速度的切向分量（tangential component）和法向分量（normal component）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种方式建立运动学（kinematics）的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。