详细解答

STEP I 2004，第 1 题

纯数学 · 根式与立方根

STEP I 2004，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q1

关键思路

形如 $a+b\sqrt{n}$（其中 a、b 为整数）的数，本身就像一个小小的数系：两个这样的数相乘，结果仍是同一形式；而两个这样的数相等，当且仅当它们的有理部分（rational part）相同，且 $\sqrt{n}$ 部分亦相同。第 (i) 部分是热身，把这样的一个数立方；第 (ii) 部分则通过比较各部分，把这个过程倒过来做。第 (iii) 部分是一条关于 x^3 的二次方程，而它的根原来正是第 (ii) 部分求得的立方。

解答

第 (i) 部分

由二项式定理（binomial theorem），并利用 $(2\sqrt{5})^2 = 20$ 及 $(2\sqrt{5})^3 = 40\sqrt{5}$，

$$\begin{aligned}\left(3+2\sqrt{5}\right)^3 &= 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 2\sqrt{5} + 3\cdot 3\cdot 20 + 40\sqrt{5}\\ &= 27 + 54\sqrt{5} + 180 + 40\sqrt{5}\\ &= 207 + 94\sqrt{5}.\end{aligned}$$

所以 $a = 207$，$b = 94$。

第 (ii) 部分

把 $\sqrt{5}$ 换成 $\sqrt{2}$，同样展开，对任意 c 和 d 可得

$$\begin{aligned}\left(c-d\sqrt{2}\right)^3 &= c^3 - 3c^2d\sqrt{2} + 3c\cdot 2d^2 - 2d^3\sqrt{2}\\ &= \left(c^3+6cd^2\right) - \left(3c^2d+2d^3\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

由于实立方根（real cube root）是唯一的，我们需要 $(c-d\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}$。

想一想 为甚么可以把有理部分和 $\sqrt{2}$ 部分分开比较?

若 $p+q\sqrt{2} = r+s\sqrt{2}$，其中 p,q,r,s 为整数且 $q \neq s$，则 $\sqrt{2} = (p-r)/(s-q)$ 便是有理数，但事实并非如此。所以 $q=s$，从而 $p=r$。因此我们需要

$$c^3 + 6cd^2 = 99, \qquad 3c^2d + 2d^3 = 70.$$

由于 c 和 d 均为正数,第一条方程迫使 $c^3 < 99$,故 $c \leq 4$。把每个值逐一代入 $6cd^2 = 99 - c^3$:

- $c=1$：$6d^2 = 98$，没有整数解；
- $c=2$：$12d^2 = 91$，没有；
- $c=3$：$18d^2 = 72$，故 $d=2$；
- $c=4$：$24d^2 = 35$，没有。

唯一的可能是 $c=3$，$d=2$，而它也满足第二条方程：$3\cdot 9\cdot 2 + 2\cdot 8 = 54+16 = 70$。因此

$$\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}, \qquad c=3,\ d=2.$$

（顺带检查一下正负号：$2\sqrt{2} \approx 2.83 < 3$，所以 $3-2\sqrt{2}$ 是正数，这与 $99-70\sqrt{2} \approx 0.005$ 是正数相符。）

第 (iii) 部分

设 $y = x^3$。方程变成 $y^2 - 198y + 1 = 0$，所以

$$y = \frac{198 \pm \sqrt{198^2-4}}{2} = 99 \pm \sqrt{99^2-1} = 99 \pm \sqrt{9800} = 99 \pm 70\sqrt{2},$$

当中用到 $9800 = 4900\cdot 2$。两个值都是正实数。

由第 (ii) 部分，$99-70\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^3$。至于另一个根，留意该二次方程两根之积为 1，所以

$$99+70\sqrt{2} = \frac{1}{99-70\sqrt{2}} = \frac{1}{(3-2\sqrt{2})^3} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^3,$$

因为 $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9-8 = 1$。（同样地，在第 (ii) 部分的展开式中把 d 的正负号改变，亦可直接得出 $(3+2\sqrt{2})^3 = 99+70\sqrt{2}$。）

每个实数恰好有一个实立方根，所以每个 y 值恰好给出一个实数 x。两个实数解是

$$x = 3-2\sqrt{2} \qquad \text{和} \qquad x = 3+2\sqrt{2}.$$

这条六次方程（sextic）其余四个解都是复数：即每个 y 余下的立方根。

验算

- 以数值计算，$(3+2\sqrt{5})^3 \approx 417.19$，而 $207+94\sqrt{5} \approx 417.19$。
- $3+2\sqrt{2} \approx 5.8284$，而 x^6-198x^3+1 在此值处等于零（在舍入误差范围内）；在 $3-2\sqrt{2} \approx 0.1716$ 处亦然。
- 第 (iii) 部分两个答案之积为 1，理应如此：若 x 是根，则 $1/x$ 也是根，因为把方程除以 x^6，便得到关于 $1/x$ 的同一条方程。

常见错误

- 展开时忘记 $(d\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}\,d^3$，而不是 $\sqrt{2}\,d^3$。
- 由第一条方程求得 $c=3$，$d=2$，却没有验证第二条方程。
- 在第 (iii) 部分给出六个“解”：每个正数只有一个立方根是实数。

STEP 之外

所有形如 $a+b\sqrt{2}$（a,b 为整数）的数组成的集合是一个环（ring），记作 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$，而 $3+2\sqrt{2}$ 是其中的一个单位（unit）：它在同一个环内有逆元（inverse）$3-2\sqrt{2}$。这类单位与佩尔方程（Pell's equation）$a^2-2b^2=\pm 1$ 息息相关（留意 $99^2-2\cdot 70^2=1$），而 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 的每个单位都是 $\pm(1+\sqrt{2})^n$。想进一步了解，可参阅 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*，或 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。