详细解答

STEP III 2003，第 9 题

力学 • 平衡的稳定性

STEP III 2003，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s3-q9

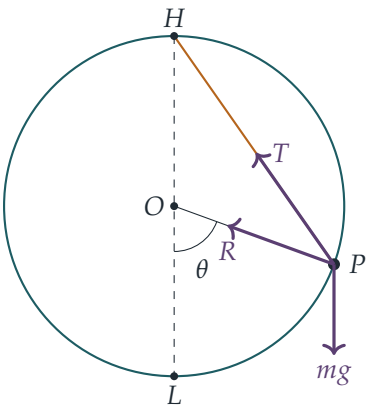
关键思路

金属线是光滑的，所以它的反作用力（reaction）总是沿半径方向，并不作功。因此一切都发生在切向（tangential）方向：把张力（tension）和重量沿切线分解，便得到一条关于 $\ddot{\theta}$ 的方程，平衡（equilibrium）位置和微小振动（small oscillations）都可由它求出。等腰三角形 OHP 的几何性质提供了所需的全部角度。

解答

建立模型

把 P 看成光滑金属线上的质点（particle），所以金属线的反作用力 R 沿 PO 作用。绳子是轻绳，并服从胡克定律（Hooke's law）。取 $0 < \theta < \pi$，即 P 位于垂直直径 LH 的其中一侧。



由于 $OH = OP = a$，三角形 OHP 是等腰三角形，且 $\angle HOP = \pi - \theta$，所以它的两个底角为

$$\angle OHP = \angle OPH = \tfrac{1}{2}\theta, \qquad HP = 2a\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

当 $HP > a$，即 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ 时，绳子处于绷紧（taut）状态，这时由胡克定律得

$$T = \frac{\alpha mg}{a}(2a\cos\tfrac{1}{2}\theta - a) = \alpha mg(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1).$$

现在沿 P 点的切线分解，取 θ 增加的方向（即朝向 H）为正。绳子与 PO 成 $\frac{1}{2}\theta$ 角，所以它与这条切线成 $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$ 角，其切向分量为 $T\sin\frac{1}{2}\theta$。重量的切向分量为 $-mg\sin\theta$，而 R 没有切向分量。切向加速度为 $a\ddot{\theta}$，故

$$\begin{aligned} ma\ddot{\theta} &= T\sin\tfrac{1}{2}\theta - mg\sin\theta \\ &= mg\Big[\alpha(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1)\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big], \end{aligned}$$

所以，只要绳子绷紧，

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\tfrac{1}{2}\theta\Big[2(\alpha-1)\cos\tfrac{1}{2}\theta - \alpha\Big]. \qquad (*)$$

（把能量 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha mga(2\cos\frac{1}{2}\theta - 1)^2$ 求导，也会得到同一条方程。）

平衡位置

平衡时 $\ddot{\theta} = 0$。当 $0 < \theta < \pi$ 时，$\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$，所以我们需要

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)},$$

由于 $\alpha > 1$，这个式子是有意义的。要由此得到 $0 < \theta < \pi$，我们需要 $0 < \cos\frac{1}{2}\theta < 1$。这个值是正数，而

$$\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} < 1 \iff \alpha < 2\alpha - 2 \iff \alpha > 2.$$

我们还需要绳子在该处绷紧，因为 $(*)$ 是在这个假设下得出的：$\dfrac{\alpha}{2(\alpha-1)} > \dfrac{1}{2} \iff \alpha > \alpha - 1$，这恒成立。所以若 $\alpha > 2$，便存在一个满足 $0 < \theta < \pi$ 的平衡位置，正如题目所求。

? **想一想** 假如绳子在平衡位置是松弛（slack）的，会怎样?

那样就只有重力有切向分量，而 $-mg\sin\theta = 0$ 在 $0 < \theta < \pi$ 内无解。这就是为甚么我们求得的平衡位置自动满足 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$ 这一点如此重要。

当 $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ 时的微小振动

这时

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以平衡位置在 $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{4}\pi$，即 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，此时 P 与 O 处于同一水平。设 $\theta = \frac{1}{2}\pi + \phi$，则 $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$。把 $(*)$ 写成 $\ddot{\theta} = \frac{g}{a} f(\theta)$，其中 $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$。当 ϕ 很小时，

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + \phi) \approx f'(\tfrac{1}{2}\pi)\,\phi.$$

由于 $(*)$ 中的方括号在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 时等于零，使用乘积法则（product rule）后只剩下一项：

$$f'(\tfrac{1}{2}\pi) = \sin\tfrac{1}{4}\pi \cdot \left[-2(\alpha-1)\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right] = -(\alpha-1)\sin^2\tfrac{1}{4}\pi = -\frac{\alpha-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

因此，当 ϕ 很小时，

$$\ddot{\phi} \approx -\frac{g(\sqrt{2}+1)}{2a}\,\phi$$

正如题目所求。

最后部分

ϕ 的系数是负数，所以质点受到微小位移后，会围绕 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 作（近似的）简谐运动（simple harmonic motion）：这个平衡是稳定（stable）的。角频率（angular frequency）为 $\omega = \sqrt{g(\sqrt{2}+1)/(2a)}$，所以周期（period）为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{(\sqrt{2}+1)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)a}{g}},$$

而振幅（amplitude）会一直保持很小，因为能量守恒（金属线光滑，绳子具弹性，所以没有任何东西耗散能量）。

验算

- 当 $\alpha = 2$ 时，平衡位置的公式给出 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$，即 $\theta = 0$：平衡位置与最低点重合，这与条件 $\alpha > 2$ 吻合。
- 当 $\alpha \to \infty$ 时，$\cos\frac{1}{2}\theta \to \frac{1}{2}$，所以 $\theta \to \frac{2}{3}\pi$ 而 $HP \to a$：非常硬的绳子几乎不会伸长。
- 取 $a = 1.3\,\mathrm{m}$ 和 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，由 $\phi = 0.01$ 开始对完整的方程 $(*)$ 作数值逐步计算，得到周期约为 $2.0819\,\mathrm{s}$，与 $2\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)a/g} \approx 2.0818\,\mathrm{s}$ 相符。

常见错误

- 使用 $HP = 2a\sin\frac{1}{2}\theta$：那是弦 LP 的长度，而不是 HP。三角形 OHP 中位于 O 的角是 $\pi - \theta$。
- 忘记检查绳子在平衡位置是否绷紧，因为松弛的绳子没有张力。

- 沿径向而不是沿切向分解：径向方程会引入未知的反作用力 R，而且完全没有提供关于 $\ddot{\theta}$ 的信息。

STEP 之外

在平衡位置附近作线性化（linearising），$\ddot{\phi} \approx f'(\theta_0)\,\phi$，是研究任何动力系统（dynamical system）稳定性的标准第一步：$f'(\theta_0)$ 的正负号（等价地，就势能（potential energy）而言，是 $V''(\theta_0)$ 的正负号）决定了系统是振动还是一去不返。在大学一年级的课程中，这会发展成非线性常微分方程（nonlinear ODEs）的相平面（phase plane）分析。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）通过势能来处理稳定平衡附近的微小振动，讲解得十分清楚。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。