详细解答

STEP III 2003，第 8 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP III 2003，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s3-q8

关键思路

第 (i) 部分是隐函数求导（implicit differentiation），但它其实是一个技巧的示范：曲线族 $(y+ax)^n(y+bx)=c$ 的斜率（gradient）是 x 和 y 的两个线性式之比。第 (ii) 部分则把这个技巧倒过来用。我们对一般的曲线族求导，读出以 a、b 和 n 表示的斜率，再选取这些数值，使它与题目给出的方程吻合。一旦吻合，这个式子沿每一条解曲线（solution curve）都是常数，而这个常数关系就是通解（general solution）。

解答

第 (i) 部分

利用乘积法则（product rule）和链式法则（chain rule），把 $(y+2x)^3(y-4x)=c$ 对 x 求导，并以 y' 表示 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

$$3(y+2x)^2(y'+2)(y-4x)+(y+2x)^3(y'-4)=0.$$

在 $y+2x\neq 0$ 的点上，我们可以除以 $(y+2x)^2$：

$$3(y'+2)(y-4x)+(y+2x)(y'-4)=0.$$

把含 y' 的项合并，

$$y'[3(y-4x)+(y+2x)]=-6(y-4x)+4(y+2x),$$
$$y'(4y-10x)=32x-2y,$$

再把分子和分母同除以 2，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{16x-y}{2y-5x},$$

这正是所求。（在直线 $y=-2x$ 上，曲线的 $c=0$，而公式在那里仍然给出正确的斜率 -2。）

第 (ii) 部分

设 $F=(y+ax)^n(y+bx)$，其中 y 是 x 的函数。与第 (i) 部分完全一样，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}&=n(y+ax)^{n-1}(y'+a)(y+bx)+(y+ax)^n(y'+b)\\&=(y+ax)^{n-1}\Big[y'((n+1)y+(nb+a)x)+(na+b)y+(n+1)ab\,x\Big].\end{aligned}$$

因此，在 $y=-ax$ 以外，F 沿一条曲线为常数，当且仅当

$$y'=-\frac{(na+b)y+(n+1)ab\,x}{(n+1)y+(nb+a)x}. \qquad (*)$$

（第 (i) 部分就是 $a=2$、$b=-4$、$n=3$ 的情况，得出 $(32x-2y)/(4y-10x)$。）

> **?** **想一想** 一个分数可以有很多种写法，那么我们怎样把 $(*)$ 与 $\dfrac{10x-4y}{3x-y}$ 配对起来?

分子和分母同乘一个数，分数的值不变，所以我们只能在相差一个公因子的意义下把两者配对。把目标写成 $-(4y-10x)/(y-3x)$，再把分子和分母同乘 $k=n+1$，使两个分母中 y 的系数相同。于是我们需要

$$na+b=-4(n+1),\qquad (n+1)ab=10(n+1),\qquad nb+a=-3(n+1).$$

由于 $n+1\neq 0$（若 $n=-1$，$(*)$ 的分母便没有 y 项），中间的方程给出 $ab=10$。把首尾两个方程相加，得 $(n+1)(a+b)=-7(n+1)$，所以 $a+b=-7$。因此 a 和 b 是 $t^2+7t+10=0$ 的根，即 -2 和 -5。把首尾两个方程相减，得

$$(n-1)(a-b)=-(n+1).$$

- 取 $a=-5$、$b=-2$：$-3(n-1)=-(n+1)$，所以 $n=2$。
- 取 $a=-2$、$b=-5$：$3(n-1)=-(n+1)$，所以 $n=\frac{1}{2}$。

两种选择描述的是同一批曲线，因为把 $(y-2x)^{1/2}(y-5x)=c$ 两边平方便得 $(y-5x)^2(y-2x)=c^2$。我们取 $n=2$，这样可以避开平方根。

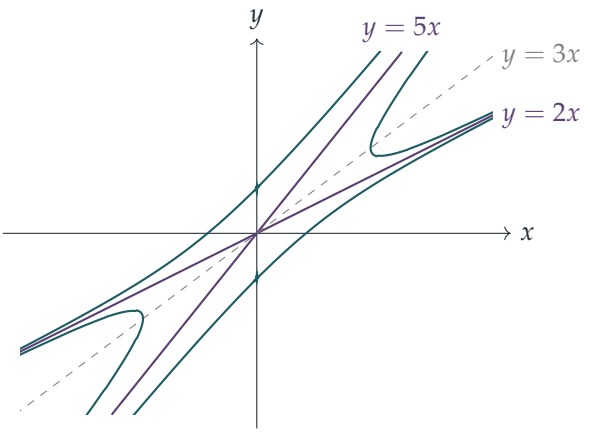
为稳妥起见，我们直接验证。设 $G=(y-5x)^2(y-2x)$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}&=(y-5x)\big[2(y'-5)(y-2x)+(y-5x)(y'-2)\big]\\&=(y-5x)\big[3y'(y-3x)-12y+30x\big]\\&=3(y-5x)\big[y'(y-3x)-(4y-10x)\big].\end{aligned}$$

若 y 满足该微分方程（differential equation），则 $y'(y-3x)=4y-10x$，所以方括号内的式子等于零，$\mathrm{d}G/\mathrm{d}x=0$。因此 G 在每一条解曲线上都是常数，通解为

$$\boxed{(y-5x)^2(y-2x)=C}$$

其中 C 为任意常数。$C=0$ 给出直线 $y=5x$ 和 $y=2x$。两者确实都是解：在 $y=2x$ 上，右边是 $2x/x=2$；在 $y=5x$ 上，右边是 $(-10x)/(-2x)=5$。所有曲线在与直线 $y=3x$ 相交之处都有铅垂切线，而方程在该直线上没有定义。



曲线 $(y-5x)^2(y-2x)=\pm1$（蓝绿色）和 $C=0$ 的直线解（紫红色）。位于两条直线之间的分支，在与虚线 $y=3x$ 相交之处有铅垂切线。

第 (ii) 部分的另一种解法

右边只取决于 y/x，所以代换 $y=vx$ 同样可行。它给出

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{(v-2)(v-5)}{3-v},$$

分离变量（separating the variables）并运用部分分式（partial fractions），可得 $\ln|x|=-\frac{1}{3}\ln|v-2|-\frac{2}{3}\ln|v-5|+$ 常数，整理后得到相同的答案。题目所用的方法则无须用到部分分式。

验算

- 第 (i) 部分本身就是对 $(*)$ 的一次验算：把 $a=2$、$b=-4$、$n=3$ 代入，便重现该处求得的斜率。
- 在点 $(1,0)$，方程给出斜率 $10/3$。在该点对 $(y-5x)^2(y-2x)=C$ 作隐函数求导，得 $(-5)\big[2(y'-5)(-2)+(-5)(y'-2)\big]=0$，所以 $-9y'+30=0$，$y'=10/3$。

- 数值方面，我们用龙格—库塔法（Runge–Kutta method）从五十个随机起点逐步求解该微分方程。沿每一条路径，$(y-5x)^2(y-2x)$ 的值都保持不变，误差约为 10^{-13}。

常见错误

- 不考虑公因子，直接把 $(*)$ 的系数与 $10x-4y$ 和 $3x-y$ 配对，结果得出互相矛盾的方程。
- 把答案留作 $(y-2x)^{1/2}(y-5x)=c$，而没有留意到它其实是同一个曲线族；而且除非小心处理正负号，否则还会漏掉 $y<2x$ 的解。
- 忘记 $C=0$ 是容许的，它给出直线解 $y=2x$ 和 $y=5x$。

STEP 之外

这里的方程是*齐次*（homogeneous）的：右边只取决于 y/x。寻找一个沿着解保持不变的函数 $G(x,y)$，正是*恰当方程*（exact equations）和*积分因子*（integrating factors）背后的想法。在力学中，同样的想法就是寻找能量之类的守恒量（conserved quantities）。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）在开首几章便涵盖了这两个课题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。