详细解答

STEP III 2003，第 7 题

纯数学 · 西姆松线

> **STEP III 2003，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q7

关键思路

要找垂足（foot of the perpendicular），可从 P 出发，沿直线的法线（normal）方向一直走到碰上该直线为止，所以写 $N = P + \lambda$(法向量)，再解出 λ。至于第二部分，关于 s 和 t 的条件是两个斜率（gradient）之积等于 -1：它说明 PA 与 PB 互相垂直。把它化成圆的方程后，正好令共线（collinear）的验证迎刃而解。

解答

N 的坐标

直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$，即

$$bx + ay = ab.$$

这条直线的一个法向量（normal vector）是 (b, a)，所以由 P 所作垂线的垂足 N 具有以下形式：

$$N = (s + \lambda b,\ t + \lambda a)$$

其中 λ 为某个数。由于 N 在 AB 上，

$$b(s + \lambda b) + a(t + \lambda a) = ab \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{ab - bs - at}{a^2 + b^2}.$$

因此

$$x = s + \lambda b = \frac{s(a^2 + b^2) + ab^2 - b^2 s - abt}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - abt + a^2 s}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - a(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

$$y = t + \lambda a = \frac{t(a^2 + b^2) + a^2 b - abs - a^2 t}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b^2 t - abs}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

这正是所需的结果。

N 在 XY 上

首先看看这个条件说的是甚么。要令它有意义，必须有 $s \neq 0$ 及 $s \neq a$；又因为乘积是 -1 而不是 0，所以还有 $t \neq 0$ 及 $t \neq b$。展开后得

$$t(t-b) = -s(s-a) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = as + bt. \tag{$*$}$$

现在 $X = (s, 0)$，$Y = (0, t)$。由于 $s \neq 0$ 及 $t \neq 0$，这是两个不在原点的相异点，而直线 XY 为

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1, \qquad \text{即} \qquad tx + sy = st.$$

所以我们要证明 N 的坐标满足 $tx + sy = st$。

> **想一想** 我们应该直接代入然后听天由命，还是有更整洁的方法去整理这些代数运算？

为求简洁，设 $k = bt - as$。利用上面的公式，

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(tx+sy) &= t(ab^2 - ak) + s(a^2b + bk) \\ &= ab^2t + a^2bs + k(bs - at).\end{aligned}$$

最后那个乘积展开后十分整齐：

$$k(bs-at) = (bt-as)(bs-at) = b^2st - abt^2 - abs^2 + a^2st = (a^2+b^2)st - ab(s^2+t^2).$$

因此

$$(a^2+b^2)(tx+sy) = (a^2+b^2)st + ab(as + bt - s^2 - t^2).$$

这对任何 P 都成立。根据 $(*)$，括号内的式子等于零，所以 $tx + sy = st$，即 N 在直线 XY 上。

几何意义

PB 的斜率是 $\dfrac{t-b}{s}$，PA 的斜率是 $\dfrac{t}{s-a}$，所以该条件说的是 $PA \perp PB$：角 APB 是直角。等价地，$(*)$ 可写成

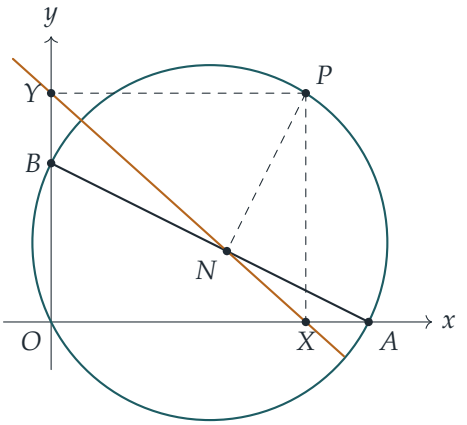
$$\left(s - \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(t - \tfrac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4},$$

所以 P 在以 AB 为直径的圆上。由于角 AOB 也是直角，这个圆通过 O：它就是三角形 OAB 的外接圆（*circumcircle*）。

X、Y 和 N 三点，分别是由 P 到三角形三边 OA、OB 和 AB 所作垂线的垂足。所以这个结果说的是：

若 P 在一个三角形的外接圆上，则由 P 到三边（有需要时延长）所作垂线的垂足共线。

这就是西姆松线（*Simson line*）定理，这里证明的是直角三角形的情况，而直角顶点放在原点。



取 $a = 4$，$b = 2$：P 在通过 O、A、B 的圆上；直线 XY（琥珀色）通过 N。

验算

- 取 $P = O$，即 $s = t = 0$：公式给出 $N = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$，它既在 $bx + ay = ab$ 上，也在通过 O 且垂直于 AB 的直线 $y = \frac{a}{b}x$ 上，与预期相符。
- 取 $a = 4$，$b = 2$，以及圆上的点 $P = (2 + \sqrt{5}\cos 1,\ 1 + \sqrt{5}\sin 1) \approx (3.208, 2.882)$，公式给出 $N \approx (2.214, 0.893)$，而 $\frac{2.214}{3.208} + \frac{0.893}{2.882} \approx 0.690 + 0.310 = 1$，所以 N 在 XY 上。
- 恒等式 $(a^2 + b^2)(tx + sy - st) = ab(as + bt - s^2 - t^2)$ 同时给出逆命题（converse）：若 P 不在坐标轴上，则仅当 P 在圆上时，N 才在 XY 上。

常见错误

- 把 (a, b) 当作 AB 的法向量。AB 的方向是 $(-a, b)$，所以法向量是 (b, a)。
- 一次过把所有东西展开，结果淹没在算式之中。正如题目给出的答案所提示，把 $bt - as$ 当作一个符号来处理，代数运算只需寥寥数行。
- 写到“角 APB 是直角”便停笔。题目想要的几何意义是西姆松线：X、Y、N 是到三角形 OAB 三边所作垂线的垂足。

STEP 之外

西姆松线对任何三角形都成立，其综合几何证明（synthetic proof）用到圆内接四边形（cyclic quadrilateral）和同弓形内的圆周角相等。它的逆命题也成立，而当 P 沿外接圆移动时，各条西姆松线的包络（envelope）是一条三尖瓣线（deltoid，即施泰纳内摆线，Steiner's hypocycloid）。坐标法和复数法令这类结果变得按部就班便可推出；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）展示了复数如何优雅地处理圆的几何，而 Coxeter 与 Greitzer 的 *Geometry Revisited*（《几何学的新探索》）则涵盖西姆松线以及更多经典的三角形几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。