详细解答

STEP III 2003，第 6 题

纯数学 · 三角函数裂项相消求和

STEP III 2003，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s3-q6

关键思路

各项角度以相等间隔递增的余弦之和，照原样处理并不方便；但只要把每一项都乘以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$，每个余弦就会变成两个正弦之*差*，整个和式随即可以裂项相消（telescoping）。余下的是两个正弦之差，再用和差化积公式（factor formula）便可化为乘积。令一个乘积等于零，是很容易处理的事。唯一要留神的是：我们乘上了 $\sin\frac{1}{2}\theta$，而它本身也可能等于零。

解答

恒等式

利用 $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$，取 $A=r\theta$ 及 $B=\frac{1}{2}\theta$：

$$\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta-\sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta=2\cos r\theta\,\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

这就是所需的结果。

级数求和

记

$$S(\theta)=\sum_{r=a}^{b-1}\cos r\theta.$$

乘以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$，并对由 a 至 $b-1$ 的每个 r 使用上述恒等式（identity），

$$\begin{aligned} 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\, S(\theta) &= \sum_{r=a}^{b-1}\Big[\sin(r+\tfrac{1}{2})\theta - \sin(r-\tfrac{1}{2})\theta\Big] \\ &= \sin(b-\tfrac{1}{2})\theta - \sin(a-\tfrac{1}{2})\theta, \end{aligned}$$

因为每个 $\sin(r+\frac{1}{2})\theta$ 都与下一项的 $-\sin((r+1)-\frac{1}{2})\theta$ 互相抵消，最后只剩下末项的上端和首项的下端。

现在使用 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$，其中 $\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(a+b-1)\theta$ 及 $\frac{P-Q}{2} = \frac{1}{2}(b-a)\theta$：

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta\, S(\theta) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta\ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta. \qquad (*)$$

解 $S(\theta) = 0$

> **想一想** 我们可以直接把 $(*)$ 除以 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 吗?

只有当 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$，即 θ 不是 2π 的倍数时才可以。所以我们先处理这些值。若 $\theta = 2m\pi$，其中 m 为整数，则每一项 $\cos r\theta$ 都等于 1，故 $S(\theta) = b-a \geq 2$。这些值永远不是解。

对于其余所有 θ，我们有 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$，而由 $(*)$ 可得

$$S(\theta) = 0 \iff \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0 \ \text{ 或 } \ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta = 0.$$

- $\cos\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0$ 当且仅当 $\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = \big(k+\frac{1}{2}\big)\pi$，即

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  （注意 $a+b-1 \geq 3$，所以我们并没有除以零。）这些值全都不是 2π 的倍数：否则须有 $2k+1 = 2m(a+b-1)$，即一个奇数等于一个偶数。所以它们全部都是解。

- $\sin\frac{1}{2}(b-a)\theta = 0$ 当且仅当 $\frac{1}{2}(b-a)\theta = k\pi$，即

$$\theta = \frac{2k\pi}{b-a}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  这个值是 2π 的倍数，当且仅当 $b-a$ 整除 k，而我们已经知道这些值并不是解。所以必须把它们剔除。

> **想一想** 在 2π 的倍数处，$(*)$ 看来是成立的，为甚么仍要把它们从第二族解中剔除?

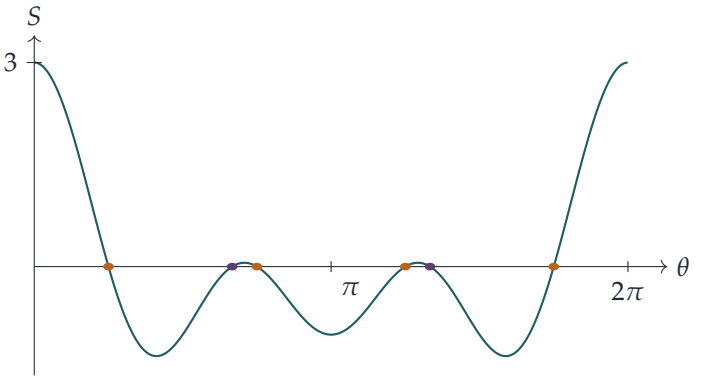
在 $\theta = 2m\pi$ 处，不论 S 取甚么值，$(*)$ 的两边都是零，所以 $(*)$ 在这些位置完全没有告诉我们关于 S 的任何资料。这只是全式乘以 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 所造成的假象。由于 $b-a \geq 2$，第二族之中仍然有真正的解，例如 $\theta = 2\pi/(b-a)$。

综合以上所得，全部的解正好是

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1}\ (k \in \mathbb{Z}) \qquad 或 \qquad \theta = \frac{2k\pi}{b-a}\ (k \in \mathbb{Z},\ b-a \nmid k).$$

这两族解可能有重叠。这并无大碍，因为同时属于两族的值仍然只算一个解。

举例来说，当 $a=1$ 及 $b=4$ 时，方程是 $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$。在 $(0,2\pi)$ 内，它的根有来自第一族的 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$，以及来自第二族的 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$。注意 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 并不包括在内，该处 $S=3$。



曲线 $S=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta$：琥珀色的根来自余弦因子，紫红色的根来自正弦因子。

验算

- 取 $a=1$、$b=4$：在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 处，$\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$；在 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 处，$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$。
- 以数值方法检验，对多组 a,b 随机选取 θ，$(*)$ 均成立。对所有 $1\le a\le 6$、$a+2\le b\le 11$，在 $(0,6\pi)$ 上对 S 作细密扫描，找到的根与公式所给出的完全一致，再无其他。例如当 $a=1$、$b=3$ 时，根 $\theta=13\pi/3\approx 13.6136$ 来自第一族。

常见错误

- 未经检查便把 $(*)$ 除以 $\sin\frac{1}{2}\theta$，因而把 $\theta=2m\pi$ 也算作解；在这些位置 $S=b-a\neq 0$。
- 弄错裂项相消后剩下的首末两项：它们是 $\sin\left(b-\frac{1}{2}\right)\theta$ 和 $\sin\left(a-\frac{1}{2}\right)\theta$，因为最后一个余弦是 $\cos(b-1)\theta$。
- 只给出某一区间（例如 $[0,2\pi)$）内的解，但题目要求的是全部的解。

STEP 之外

$\sum \cos r\theta$ 的闭合形式（closed form），其实是以 $e^{i\theta}$ 为公比的等比级数（geometric series）的实部。取 $a = -n$ 及 $b = n+1$，便得到狄利克雷核（Dirichlet kernel）$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta$，它是傅里叶级数（Fourier series）理论以及其收敛（converge）问题的核心。想明白为何这类三角和一旦改用 $e^{i\theta}$ 来处理就会变得简单，Needham 的 *Visual Complex Analysis* 是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。