详细解答

STEP III 2003，第 5 题

纯数学 · 三次方程的根

> **STEP III 2003，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q5

关键思路

从图像入手数算根（root）的个数。首项系数（leading coefficient）为正的二次函数，其图像与 x 轴相交两次，当且仅当其极小值位于该轴下方。首项系数为正的三次函数，其图像与该轴相交三次，当且仅当其极大值在轴的上方而极小值在轴的下方。要令所有根皆为正数，就要看转向点（turning point）位于 y 轴的哪一侧，以及曲线与 y 轴相交处的正负号。最后一条方程其实是经过平移的三次曲线的一个乔装例子：配立方（complete the cube）便可把它化成该形式。

解答

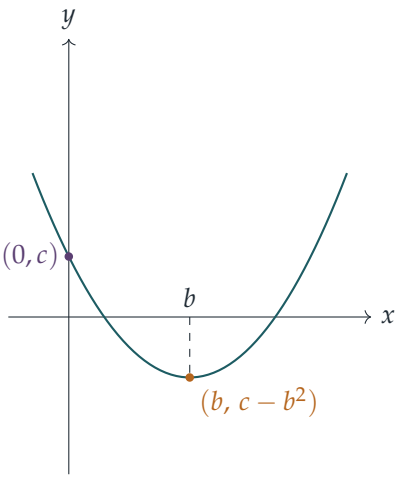
二次函数

配方（completing the square）得

$$y = x^2 - 2bx + c = (x-b)^2 + c - b^2,$$

所以转向点（极小点）位于 $(b,\ c-b^2)$。

当有两个相异实根时，曲线是一条 $\cup$ 形的抛物线（parabola），对称于 $x = b$，其顶点（vertex）位于 x 轴下方。它与 y 轴相交于 $(0, c)$。



两个相异实根。抛物线的首项系数为正，所以当 $x \to \pm\infty$ 时 $y \to +\infty$，而它的最小值是 $c - b^2$。若 $c - b^2 < 0$，曲线会降至轴的下方，然后在 $x = b$ 的两侧各自回升，因此与轴相交两次。若 $c - b^2 = 0$，曲线仅与轴相切（重根（repeated root））；若 $c - b^2 > 0$，则曲线与轴永不相遇。所以条件是

$$b^2 > c.$$

两个相异正根。我们断言条件是

$$b^2 > c, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

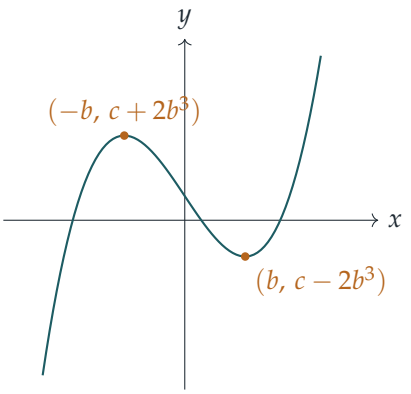
必要性（necessary）：两根 α, β 满足 $\alpha + \beta = 2b$ 及 $\alpha\beta = c$，若两根皆为正数，则这两个量亦皆为正数。**充分性（sufficient）：**若 $b^2 > c$，则有两个根，分别位于 $x = b$ 的两侧。由于 $b > 0$，右边的根是正数。左边的根位于曲线递减的区间内；曲线在 $x = 0$ 处为正（高度为 $c > 0$），在 $x = b > 0$ 处为负，所以这个根严格介乎 0 与 b 之间，因而也是正数。

三次函数

对于 $y = x^3 - 3b^2x + c$，我们有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3b^2 = 3(x - b)(x + b)$，它在 $x = \pm b$ 时等于零。代入得

$$x = -b:\ y = -b^3 + 3b^3 + c = c + 2b^3, \qquad x = b:\ y = b^3 - 3b^3 + c = c - 2b^3.$$

由于 $b > 0$，转向点分别是位于 $(-b,\ c + 2b^3)$ 的极大点和位于 $(b,\ c - 2b^3)$ 的极小点：导数（derivative）在 $x < -b$ 时为正，在两者之间为负，在 $x > b$ 时为正。



曲线由 $-\infty$ 上升至极大点，下降至极小点，然后上升至 $+\infty$，而且在这三段上各自严格单调（strictly monotonic）。所以曲线在每一段上各有一个根，从而共有三个相异的根，当且仅当极大值在轴的上方而极小值在轴的下方：

$$c+2b^3>0 \text{ 及 } c-2b^3<0, \qquad \text{即} \qquad -2b^3<c<2b^3.$$

若其中一个转向点的函数值为零，便会得到重根；若两者同为严格的正数或同为严格的负数，则只有一个实根。所以 $|c|<2b^3$ 是充分必要条件。

平移后的三次曲线的三个相异正根

曲线 $y=(x-a)^3-3b^2(x-a)+c$ 是把上一条曲线向右平移（translate）a 而得（我们仍假设 $b>0$）。所以它有三个相异实根，当且仅当 $|c|<2b^3$；这时它的极大点在 $x=a-b$，极小点在 $x=a+b$，而三个根 $x_1<x_2<x_3$ 满足

$$x_1<a-b<x_2<a+b<x_3.$$

三个根全为正数，当且仅当最小的根 x_1 为正数。记

$$y(0)=(-a)^3-3b^2(-a)+c=c-a^3+3ab^2$$

为曲线与 y 轴相交处的高度。我们断言条件是

$$|c|<2b^3, \qquad a>b, \qquad c<a^3-3ab^2.$$

想一想 为甚么单凭“$y(0)<0$”并不足以保证三个根全都在原点的右方?

因为 y 在 x_2 与 x_3 之间同样是负数。在 $x=0$ 处取负值，有可能表示原点位于中间的根与最大的根之间。我们还须知道 0 位于曲线第一段上升的部分，即极大点的左方。这正是 $a>b$ 的作用。

必要性。假设有三个相异正根。那么由上一部分可知 $|c| < 2b^3$。此外 $0 < x_1 < a - b$，所以 $a > b$。最后，y 在 $(-\infty, a-b]$ 上严格递增，而 $y(x_1) = 0$，所以 $y(0) < 0$，因为 $0 < x_1$。由此得 $c < a^3 - 3ab^2$。

充分性。假设三个条件全部成立。这时有三个相异实根，而且 $0 < a - b$，所以 0 位于 $(-\infty, a-b]$ 内，而 y 在此区间上严格递增。由于 $y(0) < 0 = y(x_1)$，我们得到 $0 < x_1$，因此三个根全为正数。

所以该方程有三个相异正根，当且仅当

$$a > b \quad \text{及} \quad -2b^3 < c < \min(2b^3,\ a^3 - 3ab^2).$$

（由于当 $a > b > 0$ 时 $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = (a-b)^2(a+2b) > 0$，上述对 c 的上下界并无矛盾。）

最后的方程

先除以 2，然后配立方。$(x-a)^3$ 中的 x^2 项是 $-3ax^2$，所以我们需要 $3a = \frac{9}{2}$，即 $a = \frac{3}{2}$。设 $x = t + \frac{3}{2}$，

$$\begin{aligned} x^3 - \tfrac{9}{2}x^2 + \tfrac{7}{2}x - \tfrac{1}{2} &= t^3 + (\tfrac{27}{4} - \tfrac{27}{2} + \tfrac{7}{2})t + (\tfrac{27}{8} - \tfrac{81}{8} + \tfrac{21}{4} - \tfrac{1}{2}) \\ &= t^3 - \tfrac{13}{4}t - 2, \end{aligned}$$

其中 t^2 项因 a 的选取而互相抵消。所以

$$2x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = 0 \iff (x - \tfrac{3}{2})^3 - 3b^2(x - \tfrac{3}{2}) + c = 0, \qquad a = \tfrac{3}{2},\ b^2 = \tfrac{13}{12},\ c = -2,$$

其中 $b = \sqrt{13/12} > 0$。现在逐一检查三个条件。

- $|c| < 2b^3$：这即是说 $2 < 2b^3$，亦即 $b^2 > 1$，而这是成立的，因为 $b^2 = \frac{13}{12} > 1$。
- $a > b$：两者皆为正数，而且 $a^2 = \frac{9}{4} = \frac{27}{12} > \frac{13}{12} = b^2$。
- $c < a^3 - 3ab^2$：这里 $a^3 - 3ab^2 = a(a^2 - 3b^2) = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4} - \frac{13}{4}\right) = -\frac{3}{2}$，而 $-2 < -\frac{3}{2}$。

三个条件全部成立，所以 $2x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = 0$ 有三个相异正根，正如所求。

验算

- 正负号的变化可直接确认最后的答案。设 $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 1$，我们有 $p(0) = -1$、$p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$、$p(1) = -1$、$p(3) = -7$ 及 $p(4) = 11$。所以在 $(0, \frac{1}{2})$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 及 $(3, 4)$ 内各有一个根。它们的数值分别是 0.185、0.760 及 3.555。
- 数值 $y(0) = c - a^3 + 3ab^2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ 与首一（monic）三次多项式 $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$ 的常数项吻合，这是理所当然的。

- 以数千组随机选取的 (a,b,c) 作测试，结果每一次都与上述条件相符。

常见错误

- 只用 $y(0)<0$（或只用 $a>b$）来判断根是否为正。两者缺一不可：当原点位于较大的两个根之间时，$y(0)<0$ 同样成立。
- 忘记了 $|c|\le 2b^3$ 中等号成立时会得到重根，因此不算“三个相异的根”。
- 把平移的方向弄反：以 $x-a$ 表示的曲线，是把原来的曲线向*右*移动 a。

STEP 之外

任何三次多项式都可以像这里一样，借着平移化成“缺项”（depressed）形式 t^3+pt+q。这时它有三个相异实根，当且仅当 $4p^3+27q^2<0$；取 $p=-3b^2$、$q=c$，这就是上文求得的条件 $c^2<4b^6$。$-(4p^3+27q^2)$ 这个量称为*判别式*（discriminant），它是三次方程如何得以求解（卡尔达诺（Cardano）公式）这段故事的开端，最终更引出伽罗瓦理论（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是迈向该理论的理想下一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。