详细解答

STEP III 2003，第 4 题

纯数学 · 参数曲线的切线

STEP III 2003，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s3-q4

关键思路

直线与这条曲线相交之处，正是某个以参数为变量的三次式（cubic）等于零之处。切线（tangent）会在 t 处产生一个二重根（double root），所以由根之和便可立即求出第三个根 T。T 的公式看起来很像 tan 的倍角公式（double-angle formula），这提示我们设 $t = \tan\theta$：映射 $t \mapsto T$ 于是变成角度上的一个简单线性映射，要把它迭代（iterate）便很容易。

解答

T 的公式

由于 $y = t + t^3$ 对 t 严格递增（strictly increasing），不同的参数（parameter）给出不同的点，所以曲线上的点与参数的值一一对应（one-to-one）。

求导可得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + 3t^2$，所以当 $t \neq 0$ 时，在 t 处的切线的斜率（gradient）为

$$m = \frac{1 + 3t^2}{2t}.$$

（因为 $t \neq 0$，切线不是垂直的。）切线的方程是 $y - (t + t^3) = m(x - t^2)$。参数为 s 的点在这条切线上，当且仅当

$$s + s^3 - (t + t^3) = m(s^2 - t^2), \qquad \text{即} \qquad f(s) \equiv s^3 - ms^2 + s - (t + t^3 - mt^2) = 0.$$

显然 $f(t) = 0$，而根据 m 的选取，$f'(t) = 3t^2 - 2mt + 1 = 0$。所以 $s = t$ 是这个三次式的（至少）二重根，而各根为 t, t, T，其中 T 是某个实数。$s^3 - ms^2 + \ldots$ 的根之和是 m，

所以

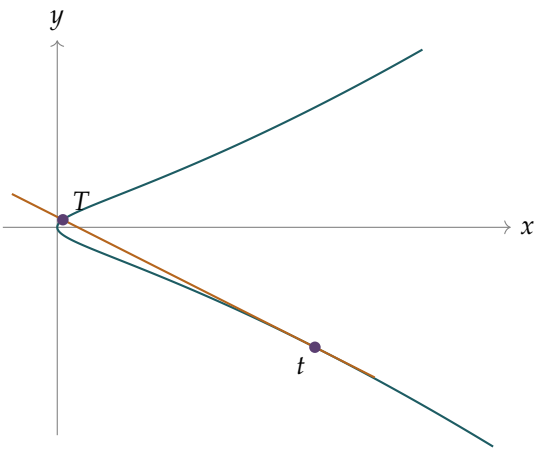
$$2t + T = \frac{1+3t^2}{2t}$$
$$T = \frac{1+3t^2-4t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

这个根 T 是该直线与曲线唯一可能相交的另一处。

只有当 $T \neq t$ 时，切线才会与曲线再次相交。现在

$$T = t \iff 1 - t^2 = 2t^2 \iff 3t^2 = 1,$$

所以我们需要 $3t^2 \neq 1$。（当 $3t^2 = 1$ 时，t 是三重根，切线只与曲线相接一次：这些正是拐点（points of inflection）。）这就证明了两个结果。



以 $t_0 = \tan\frac{7}{18}\pi$ 开始的数列

设 $t = \tan\theta$。由倍角公式，

$$T = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right).$$

所以若 $t_i = \tan\theta_i$，我们可以取 $\theta_{i+1} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_i$。由于 tan 的周期（period）为 π，而且在任何长度为 π 的区间上（除去 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍）都是一对一的，两个参数相等，当且仅当它们的角相差 π 的倍数。

? **想一想** 在迭代之前，我们必须检查每个 t_i 的甚么性质，才能确保下一个点存在?

这个构作在每一步都需要 $t_i \neq 0$ 和 $3t_i^2 \neq 1$，即 θ_i 不是 $\frac{\pi}{2}$ 的倍数，也不是 $\pm\frac{\pi}{6}$ 加上 π 的倍数。以 $\frac{\pi}{18}$ 的倍数计，我们必须避开模（modulo）18 下的 $0, \pm 3, \pm 9$。

由 $\theta_0 = \frac{7\pi}{18}$ 开始：

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{14\pi}{18} = -\frac{5\pi}{18},\\ \theta_2 &= \frac{9\pi}{18} + \frac{10\pi}{18} = \frac{19\pi}{18} \equiv \frac{\pi}{18} \pmod{\pi},\\ \theta_3 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}.\end{aligned}$$

$7, -5, 1$ 都不在禁用之列，所以每一步都成立。因此 $t_3 = \tan\frac{7\pi}{18} = t_0$，即 $P_3 = P_0$。但 $\theta_1 - \theta_0 = -\frac{12\pi}{18}$ 不是 π 的倍数，所以 $t_1 = \tan(-\frac{5\pi}{18}) < 0 < t_0$，而 $P_1 \neq P_0$。这三点的参数分别是 $\tan 70^\circ$、$-\tan 50^\circ$ 和 $\tan 10^\circ$。

第二个起始值

设 $g(\theta) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$。迭代可得

$$g^2(\theta) = -\frac{\pi}{2} + 4\theta, \qquad g^3(\theta) = \frac{3\pi}{2} - 8\theta.$$

所以 $P_3 = P_0$ 当且仅当 $\frac{3\pi}{2} - 8\theta \equiv \theta \pmod{\pi}$，即 $9\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$，由此得

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9} = \frac{(3+2k)\pi}{18}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

同理，$P_1 = P_0$ 当且仅当 $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$，即 $\theta = \frac{(3+6j)\pi}{18}$。这些正是 $3 + 2k \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$ 的情况：它们给出 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，或者根本没有有限的 t，本来就已被排除。

在模 π 之下，余下的是 $\theta \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\}$。要 $t_0 > 0$，我们需要 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，由此得 $\tan\frac{\pi}{18}$、$\tan\frac{5\pi}{18}$ 和题目给出的 $\tan\frac{7\pi}{18}$。$\tan\frac{\pi}{18}$ 这个值只是上述循环（cycle）中的 P_2。给出一个真正全新循环的值是

$$t_0 = \tan\frac{5\pi}{18} \ (= \tan 50^\circ),$$

其中 $\theta_0 = \frac{5\pi}{18}$，$\theta_1 = -\frac{\pi}{18}$，$\theta_2 = \frac{11\pi}{18}$，$\theta_3 = \frac{9\pi}{18} - \frac{22\pi}{18} = -\frac{13\pi}{18} \equiv \frac{5\pi}{18}$。$5, -1, 11$ 都不在禁用之列，而且 $t_1 = -\tan 10^\circ \neq t_0$。$\tan\frac{5\pi}{18}$ 或 $\tan\frac{\pi}{18}$ 都可以作为本题的答案。

> ? **想一想** 为甚么可以“模 π”地处理角度?

因为我们唯一用到的就是 $t = \tan\theta$，而 $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$。把 θ_i 加上 π，$g(\theta_i)$ 便改变 2π，这并不改变 t_{i+1}。所以整个参数数列只取决于 θ_0 模 π 的值。

验算

▶ 取 $t = -1$ 可得 $T = 0$：在 $(1, -2)$ 处的切线斜率为 -2，而它确实通过原点。

- 以数值计算，$t_0 = \tan 70^\circ \approx 2.747477$ 给出 $t_1 \approx -1.191754$、$t_2 \approx 0.176327$ 和 $t_3 \approx 2.747477$。同样地，$\tan 50^\circ \approx 1.191754 \to -0.176327 \to -2.747477 \to 1.191754$。
- 随机选取 t，以数值方法解三次方程求另一个交点，结果与 $T = (1 - t^2)/(2t)$ 吻合。

常见错误

- 先求弦（chord）的斜率再令两者相等，却忘记约去因子 $T - t$。利用关于根之和的韦达公式（Vieta's formula），便可完全避开这个问题。
- 直接用小数对 t 迭代这个映射，结果看不出精确的循环。正是代换 $t = \tan\theta$ 才令 $P_3 = P_0$ 精确成立。
- 把 $\tan\frac{\pi}{6}$ 当作第二个值：这时 $T = t$，所以根本没有下一个点。

STEP 之外

弦切构作法（chord-and-tangent construction）是椭圆曲线（elliptic curves）理论的核心：在该理论中，同一条“第三个交点”规则把三次曲线上的点变成一个群（group）。这里的曲线 $y^2 = x(1+x)^2$ 是一条奇异三次曲线（singular cubic）（它在 $(-1, 0)$ 有一个孤立点），而代换 $t = \tan\theta$ 表明，切线映射其实是乔装了的角度加倍。这就是为甚么这些循环来自把圆分成九等份。Silverman 与 Tate 合著的 *Rational Points on Elliptic Curves*（《椭圆曲线上的有理点》）以本科程度把这个课题阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。