详细解答

STEP III 2003，第 3 题

纯数学 · 曲线描绘

> **STEP III 2003，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q3

关键思路

设 $u=(1+x)^m$ 及 $v=(1-x)^m$。于是 $\mathrm{f}=(u-v)/(u+v)$，而商法则（quotient rule）的结果会化简得非常漂亮，因为 $u'v-uv'$ 有公因式 $(1-x^2)^{m-1}$。这个导数（derivative）永不为负，单凭这一点，我们几乎已掌握 $y=\mathrm{f}(x)$ 的整个形状。至于倒数（reciprocal）曲线，则藏着一种对称（symmetry）：把 x 换成 $1/x$，f 就变成 $1/\mathrm{f}$。

解答

分母永不为零

假设对某个实数 x 有 $(1+x)^m+(1-x)^m=0$。

若 m 是偶数，两项皆为非负，故两项必须同时为零。这就需要同时有 $x=-1$ 和 $x=1$，并不可能。

若 m 是奇数，则 $(1+x)^m=-(1-x)^m=(x-1)^m$。当 m 是奇数时，映射 $t\mapsto t^m$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增（strictly increasing），因此是一对一（one-to-one）的，于是 $1+x=x-1$，即 $1=-1$。这是矛盾（contradiction）。

所以对每个实数 x 都有 $(1+x)^m+(1-x)^m\neq 0$，而 f 在整个 $\mathbb{R}$ 上有定义并且可微（differentiable）。

导数

设 $u=(1+x)^m$ 及 $v=(1-x)^m$，则 $u'=m(1+x)^{m-1}$ 及 $v'=-m(1-x)^{m-1}$。根据商法则，

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{(u'-v')(u+v)-(u-v)(u'+v')}{(u+v)^2}=\frac{2(u'v-uv')}{(u+v)^2}.$$

分子可以化简：

$$\begin{aligned}u'v-uv' &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^m+m(1+x)^m(1-x)^{m-1}\\ &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^{m-1}[(1-x)+(1+x)]\\ &= 2m(1-x^2)^{m-1}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{4m\,(1-x^2)^{m-1}}{[(1+x)^m+(1-x)^m]^2}.$$

$m=5$ 的情况：曲线 $y=\mathrm{f}(x)$

用二项式定理（binomial theorem）展开，分子中的偶次幂互相抵消，分母中的奇次幂互相抵消：

$$\mathrm{f}(x)=\frac{2(5x+10x^3+x^5)}{2(1+10x^2+5x^4)}=\frac{x(x^4+10x^2+5)}{5x^4+10x^2+1},\qquad \mathrm{f}'(x)=\frac{20(1-x^2)^4}{[(1+x)^5+(1-x)^5]^2}.$$

现在逐一读出曲线的特征。

- 对称性。$\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}(x)$，所以曲线绕原点有旋转对称（rotational symmetry）。曲线通过 $(0,0)$，该处的斜率（gradient）为 $\mathrm{f}'(0)=20/2^2=5$。
- 单调性（*monotonic*）。对所有 x 都有 $\mathrm{f}'(x)\geq 0$，等号只在 $x=\pm1$ 时成立。所以 f 处处递增。在 $x=\pm1$ 处曲线有驻点（stationary point），而由于 $(1-x^2)^4$ 不变号，这些驻点是拐点（point of inflection），而非转向点（turning point）。它们位于 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$：$(1-x)^5$ 或 $(1+x)^5$ 一项变为零，余下 $\mathrm{f}=\pm1$。
- $|x|$ 很大时。$\mathrm{f}(x)\approx x/5$。更准确地说，

  $$\mathrm{f}(x)-\frac{x}{5}=\frac{x(40x^2+24)}{5(5x^4+10x^2+1)},$$

  当 $|x|\to\infty$ 时，上式趋向 0。所以 $y=x/5$ 是斜渐近线（oblique asymptote）。曲线在 $x>0$ 时位于渐近线之上，在 $x<0$ 时位于渐近线之下。

? **想一想** $\mathrm{f}(x)$ 的绝对值在哪里大于 1，又在哪里小于 1?

由于 f 递增且 $f(\pm1)=\pm1$，当 $|x|<1$ 时有 $|f(x)|<1$，当 $|x|>1$ 时有 $|f(x)|>1$。这一点对倒数曲线很重要。（当 $|x|<1$ 时，代入 $x=\tanh t$ 可得 $(1+x)/(1-x)=e^{2t}$，再把 f 的分子和分母同除以 $(1-x)^5$，便得 $f(\tanh t)=\tanh 5t$。这是理解曲线在 -1 与 1 之间呈 S 形的另一个角度。）

曲线 $y=1/f(x)$

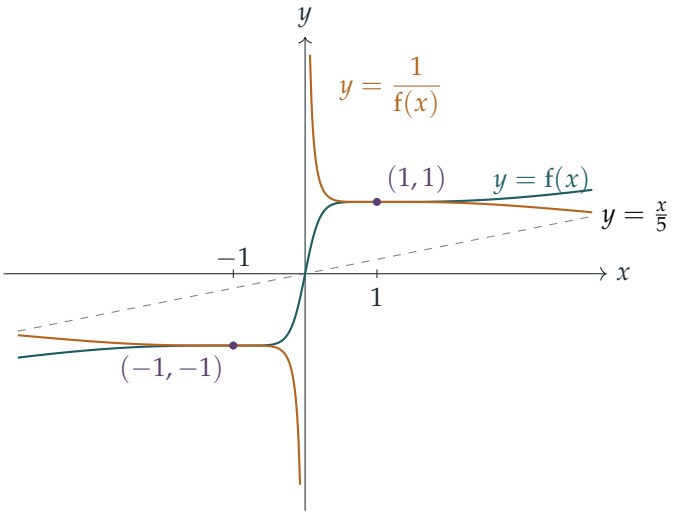
把 x 换成 $1/x$，再把分子和分母同乘以 x^5，可得

$$f(1/x)=\frac{(x+1)^5-(x-1)^5}{(x+1)^5+(x-1)^5}=\frac{(1+x)^5+(1-x)^5}{(1+x)^5-(1-x)^5}=\frac{1}{f(x)},$$

当中用了 $(x-1)^5=-(1-x)^5$。所以 $y=1/f(x)$ 就是曲线 $y=f(1/x)$，它的特征可由 f 的特征推出：

- 它是奇函数（odd function），在 $x=0$ 处没有定义，而这是 f 唯一的零点。在 0 附近，$1/f(x)\approx 1/(5x)$，所以 y 轴是铅垂渐近线（vertical asymptote），当 $x\to 0^+$ 时 $y\to+\infty$，当 $x\to 0^-$ 时 $y\to-\infty$。
- 它的导数是 $-f'(x)/f(x)^2\le 0$，所以它在 $x>0$ 上递减，在 $x<0$ 上亦递减。它在 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 有属于驻点的拐点。
- 当 $|x|\to\infty$ 时，$1/f(x)\approx 5/x\to 0$，所以 x 轴是渐近线。曲线在 $x>0$ 时位于其上，在 $x<0$ 时位于其下。

两条曲线只在 $f(x)^2=1$ 之处相遇，即 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$。两条曲线在该处都是水平的，所以它们是相切而非相交穿过。



验算

- 取 $m = 1$：公式给出 $f'(x) = 4/2^2 = 1$，而事实上 $f(x) = 2x/2 = x$。
- 以数值计算，$f(1000)/1000 \approx 0.2000016$，与渐近线 $y = x/5$ 吻合。对 $m = 1, \ldots, 8$，在随机选取的点上，以中心差分（central difference）求得的导数与 f' 的公式一致。
- $f(\tanh t) = \tanh 5t$ 和 $f(1/x) = 1/f(x)$ 在随机选取的点上均准确至 10^{-9}。

常见错误

- 把 $x = \pm 1$ 称为极大点或极小点。导数在该处触及零但不变号，所以这些是属于驻点的拐点。
- 遗漏斜渐近线：f 是五次多项式除以四次多项式，所以它的增长有如 $x/5$，而不会趋于平缓。
- 把 $y = 1/f(x)$ 画成在 $(\pm 1, \pm 1)$ 穿过 $y = f(x)$。两条曲线在该处都是平的，所以它们只是相切。

STEP 之外

代换 $x = \tanh t$ 显示，f 正是以 $\tanh t$ 表示 $\tanh 5t$ 的公式，也就是 $\tan 5\theta$ 的倍角公式（multiple-angle formula）的双曲（hyperbolic）版本。由此观之，f 是一个有理映射（rational map），它共轭（conjugate）于乘以 5 的运算。这类映射，以及它们在迭代（iteration）下的表现，正是复动力系统（complex dynamics）的起点之一。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是一本优美的书，可从中看到这类有理函数如何作用于整个复平面。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。