详细解答

STEP III 2003，第 2 题

纯数学 · 二项式级数

> **STEP III 2003，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q2

关键思路

中心二项式系数（central binomial coefficient）$\binom{2r}{r}$ 就藏在负半整数幂的二项级数（binomial series）之中。只要用开首的恒等式把 $(2r)!$ 拆成奇数因子和偶数因子，便会发现 $(1-p)^{-1/2}$ 中 p^r 的系数恰好是 $\binom{2r}{r}/4^r$。于是每个和其实都是乔装了的二项级数，余下的工作只是选取 p（以及在 (ii) 中选对幂次）。

解答

恒等式

把 $(2r)!$ 的因子分成奇数和偶数两组：

$$(2r)! = [1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)] \times [2 \times 4 \times \cdots \times 2r].$$

r 个偶数因子各自是 $1, 2, \ldots, r$ 其中一个数的 2 倍，所以第二个括号等于 $2^r\, r!$。因此

$$\binom{2r}{r} = \frac{(2r)!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1) \times 2^r\, r!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)}{r!} \times 2^r,$$

这正是所要证明的结果。

第 (i) 部分

当 $|p|<1$ 时，由二项级数可得

$$\begin{aligned}(1-p)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)(-p)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-p)^2\\ &\quad+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-p)^3+\cdots\\ &= 1+\tfrac{1}{2}p+\tfrac{3}{8}p^2+\tfrac{5}{16}p^3+\cdots.\end{aligned}$$

通项也依循同样的规律。在 p^r 的系数中，因子 $-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots$ 带来 r 个负号，$(-p)^r$ 又带来 r 个，两者互相抵消，剩下

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2r-1}{2}}{r!}\,p^r=\frac{1\times3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}\,p^r.$$

想一想 这与 $\binom{2r}{r}$ 有甚么关系?

由恒等式可知 $\dfrac{1\times3\times\cdots\times(2r-1)}{r!}=\dfrac{\binom{2r}{r}}{2^r}$。所以 p^r 的系数是 $\binom{2r}{r}/4^r$；当 $r=0$ 时这也成立，因为两边都等于 1。因此

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r\qquad(|p|<1).$$

我们要求的和中 $(p/4)^r=1/8^r$，所以取 $p=\frac{1}{2}$，这个值在收敛区间（interval of convergence）之内。于是

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{8^r}=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

第 (ii) 部分

多出来的因子 $2r+1$ 提示我们把幂次再推前一步，考虑 $(1-p)^{-3/2}$。当 $|p|<1$ 时，其二项级数中 p^r 的系数是（正负号如前一样互相抵消）

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\cdots\times\frac{2r+1}{2}}{r!} &= \frac{3\times5\times\cdots\times(2r+1)}{2^r\,r!}\\ &= (2r+1)\,\frac{1\times3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}=\frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{4^r},\end{aligned}$$

这是因为 $3\times5\times\cdots\times(2r+1)=(2r+1)\times[1\times3\times\cdots\times(2r-1)]$，然后再像 (i) 那样运用恒等式。（当 $r=0$ 时，首尾两端都等于 1。）所以

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r\qquad(|p|<1).$$

现在需要 $p/4 = \frac{1}{5}$，即 $p = \frac{4}{5}$，同样满足 $|p| < 1$。因此

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{5^r} = \left(1 - \tfrac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{5})^3,$$

这正是所要证明的结果。

另一做法：当 $|x| < \frac{1}{4}$ 时，记 $f(x) = \sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$。在收敛区间内对幂级数（power series）逐项求导，得 $\sum r\binom{2r}{r} x^r = xf'(x) = 2x(1-4x)^{-3/2}$，所以

$$\sum (2r+1)\binom{2r}{r} x^r = 4x(1-4x)^{-\frac{3}{2}} + (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = (1-4x)^{-\frac{3}{2}},$$

代入 $x = \frac{1}{5}$ 便得到相同的答案。

验算

- (i) 的首几项是 $1 + \frac{2}{8} + \frac{6}{64} + \frac{20}{512} \approx 1.371$，已经接近 $\sqrt{2} \approx 1.414$；把 200 项加起来得 1.41421356…。
- (ii) 的级数收敛得较慢（相邻项之比趋向 $\frac{4}{5}$），但 400 项之和是 11.18033988…，与 $5\sqrt{5} \approx 11.1803$ 吻合。
- 当 $r = 0, 1, 2, 3$ 时，系数 $\binom{2r}{r}/4^r$ 分别是 $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$，与直接求得的四项一致。

常见错误

- 弄错正负号：系数中的 r 个负因子与 $(-p)^r$ 所带来的 $(-1)^r$ 必定互相抵消，所以每个系数都是正数。
- 忘记检查所选的 p 是否满足 $|p| < 1$；若不满足，级数未必收敛至该函数。
- 在 (ii) 中换一个 p 再用 $(1-p)^{-1/2}$：单凭这个级数，不可能得出因子 $2r+1$。

STEP 之外

函数 $\sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$ 是中心二项式系数的生成函数(generating function),是组合数学(combinatorics)中的标准工具;例如把它平方便得 $\sum_r 4^r x^r$,从而证明 $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2r-2k}{r-k} = 4^r$。逐项求导为何成立，以及幂级数确切在哪里收敛，都是大学一年级分析学（analysis）的课题。关于幂级数，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多与级数有关的 STEP 练习，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。