详细解答

STEP III 2003，第 14 题

概率与统计 · 概率生成函数

> **STEP III 2003，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q14

关键思路

独立得分之和的概率生成函数（probability generating function，简称 pgf），等于各个得分的 pgf 的乘积。因此，“哪些骰子会给出相同的总点数分布”这个问题，就变成“一个多项式可以怎样分拆成两个因式”的问题。把所有式子分解成不可约（irreducible）的因式，再把这些因式分配给两颗骰子，便可以读出所有可能的重新标号方式。

解答

第一部分

设 X 为一颗标准公平骰子的得分。$1,\dots,6$ 每个点数的概率都是 $\frac{1}{6}$，所以

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \tfrac{1}{6}(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5).$$

要把括号内的式子因式分解，先把各项两两配对，然后再配成平方差：

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 = (1 + t) + t^2(1 + t) + t^4(1 + t) = (1 + t)(1 + t^2 + t^4),$$
$$1 + t^2 + t^4 = (1 + t^2)^2 - t^2 = (1 + t + t^2)(1 - t + t^2).$$

因此

$$G_X(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t)(1 - t + t^2)(1 + t + t^2).$$

若 X_1 和 X_2 是独立掷出的两颗骰子的得分，则 t^{X_1} 和 t^{X_2} 互相独立（independent），所以 $\mathrm{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathrm{E}(t^{X_1})\mathrm{E}(t^{X_2})$，而且

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_X(t)^2 = \frac{1}{36}\,t^2(1 + t)^2(1 - t + t^2)^2(1 + t + t^2)^2,$$

这正是题目要求的形式。

第二部分

设 Y 和 Z 分别为标号是 $1,2,2,3,3,4$ 和 $1,3,4,5,6,8$ 的两颗骰子的得分。数一数各面的点数，得

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}(t + 2t^2 + 2t^3 + t^4),$$
$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}(t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8).$$

对于 Y：$1 + 2t + 2t^2 + t^3 = (1 + t)(1 + t + t^2)$，把右边展开即可验证。所以

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1 + t)(1 + t + t^2).$$

对于 Z, 第一部分中有用的乘积是 $(1 + t)(1 - t + t^2) = 1 + t^3$ 和 $(1 + t + t^2)(1 - t + t^2) = 1 + t^2 + t^4$。于是

$$(1 + t^3)(1 + t^2 + t^4) = 1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^7,$$

再乘以 t，刚好得到 $t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8$。因此

$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1 + t)(1 + t + t^2)(1 - t + t^2)^2.$$

两颗骰子独立掷出，故

$$G_{Y+Z}(t) = G_Y(t)G_Z(t) = \frac{1}{36}\, t^2(1 + t)^2(1 - t + t^2)^2(1 + t + t^2)^2 = G_{X_1+X_2}(t).$$

两个 pgf 若作为多项式相等，它们的系数便一一相等，而 t^n 的系数就是总点数为 n 的概率。所以用这两颗骰子掷出每个总点数的概率，都与用两颗标准骰子时相同。

最后部分

一颗标准四面骰子的 pgf 是

$$\tfrac{1}{4}(t + t^2 + t^3 + t^4) = \tfrac{1}{4}\, t\,(1 + t)(1 + t^2),$$

所以两颗这样的骰子的总点数，其目标 pgf 是

$$\frac{1}{16}\, t^2(1 + t)^2(1 + t^2)^2.$$

假设两颗新骰子的 pgf 分别是 $\frac{1}{4}f(t)$ 和 $\frac{1}{4}g(t)$。f 中 t^n 的系数是标号为 n 的面的数目，所以 f 和 g 都是系数为非负整数的多项式，并且 $f(1) = g(1) = 4$。由于每个标号都是正整数，所以 $f(0) = g(0) = 0$。我们需要

$$f(t)\, g(t) = t^2(1 + t)^2(1 + t^2)^2.$$

想一想 为甚么 f 必定只由 t、$1+t$、$1+t^2$ 这几个因式组成，而不会有其他因式?

因式 t 和 $1+t$ 是一次式，而 $1+t^2$ 没有实根，所以三者在实数范围内都是不可约的。多项式分解成不可约因式的方法是唯一的（不计常数倍），所以右边的任何因式都必定是

$$f(t) = c\,t^k(1+t)^a(1+t^2)^b, \qquad g(t) = \tfrac{1}{c}\,t^{2-k}(1+t)^{2-a}(1+t^2)^{2-b},$$

其中 $0 \le k, a, b \le 2$，而常数 $c > 0$。

现在逐一运用 f 和 g 须符合的条件。

- 常数 c。f 的最低次项系数是 c，而 g 的是 $1/c$。两者都是面的数目，所以都是正整数，由此必有 $c = 1$。
- t 的幂次。$f(0) = 0$ 需要 $k \ge 1$，而 $g(0) = 0$ 需要 $2-k \ge 1$。所以 $k = 1$：每颗骰子恰好有一个因式 t。
- 四个面。由 $f(1) = 2^a \cdot 2^b = 4$ 得 $a+b = 2$，这时 $g(1) = 2^{2-a}2^{2-b} = 4$ 自动成立。

所以 (a,b) 是 $(2,0)$、$(1,1)$ 或 $(0,2)$，而 g 则取与之互补的选择。由于把两颗骰子对调会得出同一对骰子，所以只有两种情况。

- 两者皆为 $(a,b) = (1,1)$：$f = g = t(1+t)(1+t^2) = t + t^2 + t^3 + t^4$，即标准的一对 $1,2,3,4$ 和 $1,2,3,4$。
- $(a,b) = (2,0)$ 和 $(0,2)$：

  $$f(t) = t(1+t)^2 = t + 2t^2 + t^3, \qquad g(t) = t(1+t^2)^2 = t + 2t^3 + t^5,$$

  即标号为 $1,2,2,3$ 和 $1,3,3,5$ 的两颗骰子。

在每种情况中，两个多项式的系数都是非负整数，而且总和为 4，所以两者确实都是骰子；而按照构造方法，它们会给出正确的 pgf。

因此，仅有的标号方式就是标准的一对，以及 $\{1,2,2,3\}$、$\{1,3,3,5\}$ 这一对。

验算

对于那对非标准的四面骰子,把总点数逐一列出:16 个等可能的和是 2, 4, 4, 6, 3, 5, 5, 7, 3, 5, 5, 7, 4, 6, 6, 8, 得出总点数 $2,\ldots,8$ 的频数为 $1,2,3,4,3,2,1$，与两颗标准骰子完全相同。把 $t = 1$ 代入上面任何一个 pgf 都会得到 1，这是检查每个因式分解的快捷方法。用电脑搜索所有标号由 1 至 7 的四面骰子对，找到的恰好就是上述两对；而 $1,2,2,3,3,4$ 和 $1,3,4,5,6,8$ 这两颗骰子的总点数，亦与标准分布完全吻合（例如两种情况下都有 $\mathrm{P}(\text{总点数} = 7) = \frac{6}{36}$）。

常见错误

- 忘记了常数 c：你需要说明为甚么不可以一颗骰子带有因子 2，而另一颗带有因子 $\frac{1}{2}$。理由就是两颗骰子的最低次项系数都必须是正整数。
- 容许 $k = 0$ 或 $k = 2$。这样其中一颗骰子便会有一面标号为 0，而这并不是正整数。
- 把 $(1 - t + t^2)$ 分解成复数一次因式。在实数范围内它是不可约的，而这正是分配因式时所需要的形式。

STEP 之外

这里的一对六面骰子称为 *Sicherman* 骰子（Sicherman dice），用同样的方法可以证明，它们是唯一一对标号为正整数的非标准六面骰子。这个论证建基于多项式的唯一分解（unique factorisation）；你会在大学第一个环与域（rings and fields）的课程中遇到它，它是算术基本定理（fundamental theorem of arithmetic）的多项式版本。生成函数亦能把许多困难的计数问题化为代数问题。关于这两个课题，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群），以及 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。