详细解答

STEP III 2003，第 13 题

概率与统计 • 吸收马可夫链

STEP III 2003，第 13 题

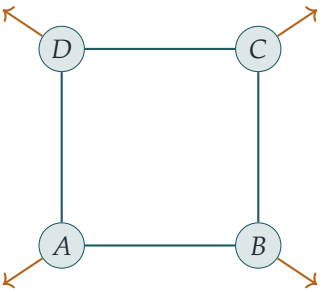
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s3-q13

关键思路

这是一种“首步分析”（first-step analysis）：以兔子下一步的行动作为条件，把从某个洞室出发的概率，用牠能到达的各个洞室出发的概率来表示。这样便得到四条线性方程，而正方形的对称性（对对角线 AC 作反射，B 与 D 互换）可以减省工夫。最后一部分，我们把同一技巧用于一个修改过的兔穴，当中进入 C 即算作失败，然后应用条件概率（conditional probability）的定义。

解答



通往地面的隧道

在整个解答中，每一步都以概率 $\frac{1}{3}$ 选出，并且与兔子过去的行踪独立（对于一只“发现自己身处”某个洞室的兔子，我们就是这样理解“可能性均等”的）。以 E_A 表示兔子最终经由 A 的隧道离开这一事件（event）。

第 (i) 部分

假设兔子身处 A，并以牠的下一步作为条件。

- 牠有 $\frac{1}{3}$ 的概率立即从 A 的隧道往上走，此时 E_A 已经发生。
- 牠有 $\frac{1}{3}$ 的概率跑到 B。这时牠身处 B，而由于牠往后的行动与牠如何到达该处无关，牠最终从 A 离开的概率是 p_B。
- 牠有 $\frac{1}{3}$ 的概率跑到 D，同理，此时的概率是 p_D。

根据全概率公式（law of total probability），

$$p_A = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

从其余洞室出发，用同样的论证可再得三条方程。唯一的分别是：经由 B、C 或 D 的隧道离开，即表示 E_A 不发生，所以该分支的贡献是 $\frac{1}{3}\cdot 0$：

$$\begin{aligned} p_B &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C, \\ p_C &= \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D, \\ p_D &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C. \end{aligned}$$

p_B 与 p_D 的方程右边相同，所以 $p_B = p_D$；把这个共同的值记作 b。（这就是对 AC 的反射对称。）于是

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b, \qquad p_C = \tfrac{2}{3}b,$$

代入 p_B 的方程，得

$$b = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b + \tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}b \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{5}{9}b = \tfrac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad b = \tfrac{1}{5}.$$

因此

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15} = \frac{7}{15}, \qquad \text{并且} \qquad p_B = p_D = \tfrac{1}{5},\ p_C = \tfrac{2}{15}.$$

想一想 我们怎样知道兔子一定会离开，从而确定这些方程真的能把各个概率定下来?

每一步兔子都有 $\frac{1}{3}$ 的概率离开，所以经过 n 步后牠仍在地底的机会是 $(\frac{2}{3})^n \to 0$：牠以概率 1 离开。此外，这四条线性方程只有一个解（我们解方程时并无任何选择余地），所以上面的数值就是所求的概率。

第 (iii) 部分

设 N 为兔子从未到过 C 这一事件。我们要求的是

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{\mathrm{P}(N \cap E_A)}{\mathrm{P}(E_A)},$$

其中兔子由 A 出发，所以分母是 $p_A = \frac{7}{15}$。

至于分子，设 q_A、q_B、q_D 分别为兔子现时身处 A、B、D（且至今未到过 C）的条件下，从未进入 C 而经由 A 的隧道离开的概率。首步分析的做法与之前完全一样，只是现在走进 C 也算作失败：

$$\begin{aligned} q_A &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}q_B + \tfrac{1}{3}q_D, \\ q_B &= \tfrac{1}{3}q_A + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot 0, \end{aligned}$$

因为兔子从 B 出发，要么跑回 A，要么跑进 C（失败），要么经由错的隧道离开（失败）。根据对称性，$q_D = q_B = \frac{1}{3}q_A$，所以

$$q_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}q_A \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{7}{9}q_A = \tfrac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad q_A = \tfrac{3}{7}.$$

因此

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{3/7}{7/15} = \frac{45}{49}.$$

验算

- p_A, p_B, p_C, p_D 这四个值是从各个洞室出发而由 A 离开的概率。根据对称性，它们也分别是从 A 出发而由 A、B、C、D 离开的概率，所以它们的和必须是 1：果然 $\frac{7}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = 1$。
- $p_A > p_B = p_D > p_C$，这合乎预期：兔子的起点离 A 越远，从那里离开的可能性就越低。
- (iii) 的答案接近 1：从 A 离开的兔子，通常只走了很短的路程便离开。模拟 4×10^5 只兔子，得出 p_A 为 0.469，条件概率为 0.918，而理论值是 $\frac{7}{15} \approx 0.467$ 和 $\frac{45}{49} \approx 0.918$。

常见错误

- 在 p_B、p_C、p_D 的方程中也加入“立即离开”的 $\frac{1}{3}$ 一项：经由 A 以外任何一条隧道离开，贡献都是 0。
- 以 $q_A = \frac{3}{7}$ 作为 (iii) 的答案。那是 $\mathrm{P}(N \cap E_A)$；题目问的是条件概率，所以我们还要除以 p_A。

STEP 之外

兔子的行动构成一条马可夫链（Markov chain）：牠的下一步只取决于牠现时身处何处。地面是一个吸收态（absorbing state），而 p_A, p_B, p_C, p_D 是吸收概率（absorption probabilities），首步分析总能把它们化为一个线性方程组。同一想法还可以求出被吸收前的期望时间（expected time）、赌徒破产（gambler's ruin）概率等等。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入门）对马可夫链有很好的初步介绍。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。