详细解答

STEP III 2003，第 11 题

力学 · 拦截运动学

> **STEP III 2003，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q11

关键思路

暂且放下运动过程，只考虑碰撞会发生的那一点。在那一刻，A、B 与碰撞点构成一个三角形，三边分别是 d、P 走过的距离和 Q 走过的距离，而 B 处的角由方位角（bearing）决定。于是余弦定理（cosine rule）给出一条方程，再把两段走过的距离都用时间表示，便得到一条二次方程（quadratic）。能否发生碰撞，就变成这条二次方程有没有正根（positive root）的问题。

解答

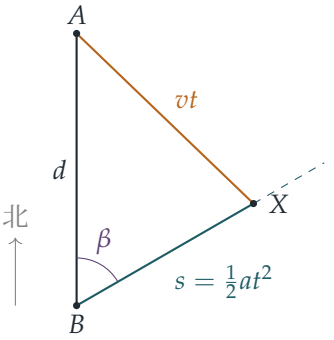
我们把 P 和 Q 视为在水平面上运动的质点（particle）。方位角由正北起顺时针量度，且 $v > 0$。

碰撞方程

假设 Q 在时间 $t > 0$ 于点 X 击中 P。到那时，P 已由静止出发，以恒定加速度 a 沿一条固定直线运动，所以

$$BX = s = \tfrac{1}{2}at^2,$$

而 Q 以恒定速率沿直线运动，所以 $AX = vt$。



由 B 到 A 的方向是正北，而由 B 到 X 的方向的方位角为 β，所以角 ABX 等于 β（若 $\beta > 180°$，则为 $360° - \beta$，两者的余弦相同）。在三角形 ABX 中应用余弦定理，得

$$v^2t^2 = d^2 + s^2 - 2ds\cos\beta.$$

（若 $\beta = 0$ 或 $180°$，这个“三角形”会退化成一条线段，但方程依然成立：它变成 $(vt)^2 = (d \mp s)^2$。）由于 $t^2 = 2s/a$，左边等于 $2v^2s/a$，整理后得

$$s^2 - 2\left(d\cos\beta + \frac{v^2}{a}\right)s + d^2 = 0. \qquad (*)$$

反过来，若 $(*)$ 有一个根 $s > 0$，设 $t = \sqrt{2s/a}$，并设 X 为 P 在该时刻的位置。那么 $(*)$ 所说的正是 $AX = vt$，而且 $AX > 0$。因此，若把 Q 由 A 朝着 X 射出，它会在时间 t 到达 X，与 P 同时到达，并击中它。故此

$$\text{存在合适的方向} \iff (*)\text{ 有正根}s.$$

必要条件（necessary condition）

设 $k = d\cos\beta + v^2/a$，则 $(*)$ 就是 $s^2 - 2ks + d^2 = 0$。

> **想一想** 这条二次方程当然需要有实根，但这样就足够了吗？关于这些根，我们还要知道甚么？

这些根还必须是正数，因为 s 是走过的距离。两根之积是 $d^2 > 0$，所以两根同号，而两根之和是 $2k$。因此，方程有正根，当且仅当判别式（discriminant）非负且 $k > 0$：

$$k^2 \geq d^2 \quad \text{且} \quad k > 0 \iff k \geq d.$$

（若 $k > 0$，则 $k^2 \geq d^2$ 等同于 $k \geq d$，因为 $d > 0$；而 $k \geq d$ 必然导致 $k > 0$。）

所以，若 Q 能击中 P，则

$$d\cos\beta + \frac{v^2}{a} \geq d, \qquad \text{即} \qquad v^2 \geq ad(1 - \cos\beta),$$

这正是所要求的结果。

在 P 移动距离 d 之前击中

现在假设 $v^2 > ad(1-\cos\beta)$，于是 $k > d > 0$。这时判别式 $4(k^2-d^2)$ 严格为正，$(*)$ 有两个相异的根 $s_1 < s_2$。两根皆为正数，因为两根之和 $2k$ 与两根之积 d^2 都是正数。由于两根相异，且

$$s_1 s_2 = d^2,$$

它们不可能同时不小于 d，也不可能同时不大于 d，所以

$$s_1 < d < s_2.$$

明确地写出来，$s_1 = k - \sqrt{k^2-d^2}$。

根据上文的逆向论证（converse），把 Q 朝着点 X_1 射出，其中该点与 B 相距 s_1 并位于 P 的路径上，则 Q 会在时间 $t_1 = \sqrt{2s_1/a}$ 击中 P，而在那一刻 P 只移动了 $s_1 < d$。所以 Q 可以瞄准某个方向，在 P 移动距离 d 之前击中 P，这就是所要证明的。

验算

- 取 $\beta = 0$：P 笔直地朝 A 走去，所以无论 v 的值是多少，两者必定相遇。条件给出 $v^2 \geq 0$，这恒成立。这时 $(*)$ 变成 $s^2 - 2(d+v^2/a)s + d^2 = 0$，而较小的根小于 d：两者在 P 到达 A 之前相遇，与常理相符。
- 取 $a = d = 1$、$\beta = 90^\circ$（即 P 向正东走），以及 $v^2 = 2 > 1 = ad(1-\cos\beta)$。这时 $(*)$ 是 $s^2 - 4s + 1 = 0$，所以 $s_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 < 1$。在 $t_1 = \sqrt{2s_1}$ 时，我们有 $s_1^2 + 1 = 2t_1^2$，所以碰撞点与 A 的距离确实是 vt_1。我们又对 a、d、β 和 v 的大量随机取值作了数值检验，既确认了在 $s_1 < d$ 处击中，也确认了当 $v^2 < ad(1-\cos\beta)$ 时，P 与 A 的距离始终大于 vt。
- 在临界情况 $v^2 = ad(1-\cos\beta)$ 下，我们得到 $k = d$ 和重根（double root）$s = d$：唯一可能的击中时刻，恰好是 P 走了 d 的时候，这就是最后一部分需要严格不等式的原因。

常见错误

- 只要求判别式非负。这样得到的是 $|k| \geq d$，它同时容许 $k \leq -d$，而这时两根皆为负数，不会发生碰撞。
- 在余弦定理中用错了角。B 处的角是 BA（正北）与 BX（方位角 β）之间的夹角，所以它就是 β 本身，而不是 $180^\circ - \beta$。
- 在最后一部分只证明了必要条件。你还必须证明朝着 X_1 瞄准确实可行，这正是那个逆向论证。

STEP 之外

这是一道追踪与拦截问题。这里目标的路径是预先知道的，而拦截者沿直线运动，所以问题归结为一条关于相遇时间的方程。导弹制导和“追逐曲线”（pursuit curves）则不同：追逐者不断转向目标，结果引出的是微分方程（differential equations）。先定下相遇点，再问谁能及时赶到，这种习惯是大学一年级力学的标准工具。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对相对运动的运动学（kinematics）有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。