详细解答

STEP III 2003，第 10 题

力学 • 变加速度

STEP III 2003，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s3-q10

关键思路

加速度 $kx\dot{x}$ 是一个对时间的恰当导数（exact derivative）：它就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}kx^2)$。因此我们可以立即积分一次，得到一阶方程（first-order equation）$\dot{x} = \frac{1}{2}kx^2 + C$，而这个方程可以分离变量。常数 C 的正负决定一切：常数为正时得到反正切（arctangent）（解会爆破），常数为负时得到部分分式（partial fractions）和对数（解会稳定下来）。

解答

我们把质点看成在 x 轴上运动，并且 $\ddot{x} = kx\dot{x}$。由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2) = 2x\dot{x}$，运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right), \qquad \text{所以} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}kx^2 + C$$

其中 C 为常数。当 $t = 0$ 时，$x = d$ 且 $\dot{x} = U$，所以 $C = U - \frac{1}{2}kd^2$，于是

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - d^2) + U. \tag{$*$}$$

第 (i) 部分

当 $U = kd^2$ 时，方程 $(*)$ 变成

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 + d^2).$$

右边恒为正，所以我们可以分离变量（separate variables）：

$$\int_d^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + d^2} = \int_0^t \tfrac{1}{2}k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{d}\left[\arctan\frac{x}{d} - \arctan 1\right] = \tfrac{1}{2}kt.$$

由于 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，由此得 $\arctan(x/d) = \frac{1}{2}dkt + \frac{\pi}{4}$，所以

$$x = d\tan\left(\frac{dkt}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

只要 tan 的辐角保持小于 $\frac{\pi}{2}$，这个式子就成立（反正切的取值范围是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$）。当 t 由 0 开始增加时，辐角由 $\frac{\pi}{4}$ 开始增加，并在以下时刻达到 $\frac{\pi}{2}$：

$$\frac{dkt}{2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{即} \qquad t = \frac{\pi}{2dk}.$$

由于 $\tan\theta \to +\infty$ 当 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 从下方趋近时成立，而且 $d > 0$，所以当 $t \to \frac{\pi}{2dk}$ 时，$x \to \infty$，这正是所要证明的。质点在有限时间内到达无穷远。

第 (ii) 部分

现在 $U < 0$，所以 $C = U - \frac{1}{2}kd^2 < 0$。设 $C = -\frac{1}{2}ka^2$，其中 $a > 0$，即

$$a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \qquad \text{使得} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - a^2).$$

因为 $U < 0$ 且 $k > 0$，所以 $a > d > 0$。

? **想一想** 部分分式所得的对数，应该用哪一个：$\ln\frac{x-a}{x+a}$ 还是 $\ln\frac{a-x}{a+x}$？

这取决于 x 落在哪个范围。常数解 $x = \pm a$ 正是 $\dot{x} = 0$ 之处。起初 $x = d$ 严格地位于 $-a$ 与 a 之间，而由该处出发的解不可能越过常数解 $x = \pm a$（这类一阶方程的两个解不可能相遇），所以在任何时刻都有 $-a < x < a$。在这个范围内 $\dot{x} < 0$，所以 x 递减，而 $a - x$ 和 $a + x$ 这两个量皆为正。

利用 $\dfrac{1}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)$ 并分离变量，

$$\frac{1}{2a}\left[\ln\frac{a-u}{a+u}\right]_d^x = \tfrac{1}{2}kt \quad \Longrightarrow \quad \frac{a-x}{a+x} = A\,\mathrm{e}^{akt}, \qquad \text{其中} A = \frac{a-d}{a+d}.$$

注意 $0 < A < 1$，因为 $a > d > 0$。解出 x，

$$x = a\,\frac{1 - A\mathrm{e}^{akt}}{1 + A\mathrm{e}^{akt}}, \qquad a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \quad A = \frac{a-d}{a+d}.$$

这个式子对所有 $t \geq 0$ 都有定义（分母为正）。等价地，由于 $\ln A = -2\,\mathrm{artanh}(d/a)$，它可以写成 $x = a\tanh(\mathrm{artanh}(d/a) - \frac{1}{2}akt)$。

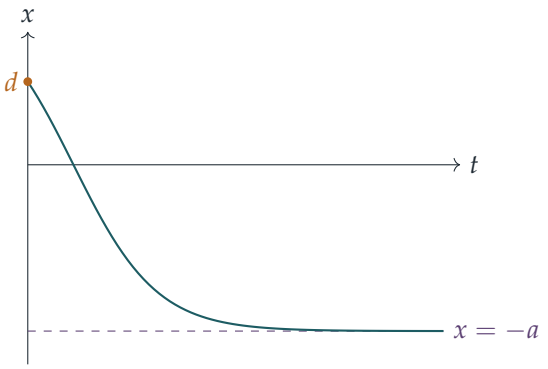
当 $t \to \infty$ 时，$A\mathrm{e}^{akt} \to \infty$，因为 $A > 0$ 且 $ak > 0$。把分子和分母同时除以 $A\mathrm{e}^{akt}$，

$$x = a\,\frac{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} - 1}{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} + 1} \longrightarrow -a.$$

所以 x 趋向极限（limit）

$$-a = -\sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}.$$

（这个极限也与 k 有关；它不能只用 d 和 U 来表示，因为固定 d 和 U 而改变 k，极限也会随之改变。）



图像（以 $d=1$、$a=2$、$k=1$ 绘画）显示质点由 d 出发，初速度为负，经过原点后越来越慢地趋近 $-a$。

验算

- 在第 (i) 部分，$t=0$ 给出 $x=d\tan\frac{\pi}{4}=d$，而求导得 $\dot{x}=\frac{1}{2}kd^2\sec^2\frac{\pi}{4}=kd^2=U$。
- 在第 (ii) 部分，$t=0$ 给出 $x=a\frac{1-A}{1+A}=d$。当 $U\to 0^-$ 时，$a\to d$ 且 $A\to 0$，所以 x 一直停留在 d：这是正确的，因为 $x=d$、$\dot{x}=0$ 会令加速度为零。
- 数值上，以龙格－库塔法（Runge–Kutta method）对随机选取的 k、d 和 U 逐步求解 $\ddot{x}=kx\dot{x}$，结果与两条公式吻合，误差小于 10^{-6}。例如，取 $k=1$、$d=1$、$U=-1.5$ 时有 $a=2$，而数值计算所得的 x 稳定于 -2.000000。

常见错误

- 使用 $\ln\frac{x-a}{x+a}$ 而不加绝对值：当 $|x|<a$ 时，这是负数的对数。
- 求极限时取了正平方根：x 由 d 开始递减，所以极限是 $-a$，而不是 $+a$。
- 把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，得到 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=kxv$，然后除以 v 而没有指出 $v\neq 0$。这在本题行得通，但直接对 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 积分便可避开这个问题。

STEP 之外

第 (i) 部分是*有限时间爆破*（finite-time blow-up）的一个小例子：对于方程 $\dot{x}=f(x)$，若 f 的增长快于线性（这里是二次增长），解便可能在有限时间内趋向无穷，所以解不一定对所有 t 都存在。第 (ii) 部分展示了另一种情况：常数解 $x=\pm a$ 是平衡点（equilibria），$-a$ 是稳定的而 $+a$ 是不稳定的，而且相线（phase line）图在未作任何积分之前已能预测

极限。这两个概念，连同阻止解互相穿越的唯一性定理（uniqueness theorem），在 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书）中都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。