详细解答

STEP III 2003，第 1 题

纯数学 · 反双曲函数积分法

> **STEP III 2003，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q1

关键思路

头两个结果是细心运用链式法则（chain rule）的计算。它们真正有用之处，是提供了一个范本：每个反函数（inverse function）的导数（derivative）都具有 $\dfrac{\text{常数}}{(\text{一次式})\sqrt{\text{一次式}}}$ 的形式，而这正正是两个被积函数（integrand）的形式。因此，对每个积分，我们选取 a 和 b 去配合这个范本。根号外的括号告诉我们该用哪一条公式。若它是 $x+b$，即常数较大的那个，便用 arcsin；若它是 $x+a$，即常数较小的那个，便用 arcosh。

解答

两个导数

设 $y=\dfrac{x+a}{x+b}$。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(x+b)-(x+a)}{(x+b)^2}=\frac{b-a}{(x+b)^2}.$$

由于 $x+a>0$ 及 $x+b>0$，可知 $y>0$；又由于 $b>a$，分子小于分母，所以 $0<y<1$，而 $\arcsin y$ 在该处可微（differentiable）。接着，

$$1-y^2=\frac{(x+b)^2-(x+a)^2}{(x+b)^2}=\frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+b)^2},$$

这里用了平方差（difference of two squares）公式。由于 $x+b>0$，$(x+b)^2$ 的平方根就是 $x+b$ 本身，所以

$$\sqrt{1-y^2}=\frac{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}{x+b}.$$

由链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+a}{x+b}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+b}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{b-a}}{(x+b)\sqrt{a+b+2x}},$$

因为 $(b-a)/\sqrt{b-a}=\sqrt{b-a}$。这就是所求的结果。

至于 arcosh，设 $z=\dfrac{x+b}{x+a}$。这里 $z>1$，因为 $x+b>x+a>0$。于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2}=-\frac{b-a}{(x+a)^2},\qquad z^2-1=\frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+a)^2}.$$

由于 $x+a>0$，$\sqrt{z^2-1}=\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}\,/(x+a)$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)=\frac{x+a}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\left(-\frac{b-a}{(x+a)^2}\right)=-\frac{\sqrt{b-a}}{(x+a)\sqrt{a+b+2x}}.$$

两个结果看来几乎一样。分别只在于正负号，以及根号外是哪一个括号。

? **想一想** arcsin 的计算实际上用到了哪些假设?

我们需要 $x+b>0$ 来化简 $\sqrt{(x+b)^2}$，也需要 $1-y^2>0$。从因式分解后的形式可见，在 $b>a$ 的前提下，$1-y^2>0$ 恰好在 $a+b+2x>0$ 时成立。我们从没有用过 $x+a>0$ 本身。所以，只要 $x+b>0$ 及 $a+b+2x>0$，arcsin 的公式便成立，即使 $x+a$ 是负数亦然，此时 y 位于 $(-1,0]$ 之内。这一点在 (ii) 中至关重要。

第 (i) 部分

根号外的括号是 $x+1$，所以我们尝试把它与 arcosh 公式中的 $x+a$ 配对。写成 $\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+6}\,/\sqrt{2}$，于是除了 $a=1$ 之外，还需要 $a+b=6$。由此得 $b=5$，故 $b-a=4$。取这些数值时，假设 $x+a>0$、$x+b>0$ 及 $b>a$ 在 $x>-1$ 时全部成立，而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right)=-\frac{2}{(x+1)\sqrt{2x+6}}=-\frac{\sqrt{2}}{(x+1)\sqrt{x+3}}.$$

两边除以 $-\sqrt{2}$，

$$\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right)+C.$$

第 (ii) 部分

现在根号外的括号是 $x+3$，所以我们把它与 arcsin 公式中的 $x+b$ 配对：$b=3$。根号内需要 $a+b+2x=2(x+1)$，所以 $a+b=2$，$a=-1$。于是 $b-a=4$，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\frac{2}{(x+3)\sqrt{2x+2}}=\frac{\sqrt{2}}{(x+3)\sqrt{x+1}}.$$

想一想 当 $a = -1$ 时，假设 $x + a > 0$ 要求 $x > 1$。我们的答案在整个范围 $x > -1$ 上仍然成立吗?

成立。正如上文所见, arcsin 的公式只需要 $x + b > 0$ 及 $a + b + 2x > 0$。在这里, 这两个条件就是 $x + 3 > 0$ 及 $2x + 2 > 0$, 对所有 $x > -1$ 都成立。在这个范围内, $(x-1)/(x+3)$ 由 -1 向上趋近 1，所以 arcsin 有定义。因此，对 $x > -1$,

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + C.$$

另一做法：代换

两个积分也可以用代换（substitution）$u = \sqrt{x+c}$ 解决，其中 $x + c$ 是根号下的式子，因为这时 $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$。在 (ii) 中，取 $u = \sqrt{x+1}$，积分变成 $\int \frac{2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{(x+1)/2}) + C$。这与我们的答案只相差常数 $-\pi/(2\sqrt{2})$。在 (i) 中，取 $u = \sqrt{x+3}$，得到 $\int \frac{2}{u^2-2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}\right| + C$。这正是以对数（logarithm）写出的 arcosh 答案。

验算

- 把答案求导还原。例如，在 $x = 0$ 处，$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{x+3}$ 的导数应为 $\frac{1}{3}$，而上面的公式给出 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 3\cdot 1} = \frac{1}{3}$。
- 数值上，用辛普森法则（Simpson's rule）可得 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}} \approx 0.374543$ 及 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x+1}} \approx 0.240301$。两个数值与原函数（antiderivative）算出的结果吻合，误差小于 10^{-12}。在下限低至 $x = -0.9$ 的区间上，结果同样吻合，而这些区间已伸入 $-1 < x < 1$ 的范围，即 (ii) 中 $x + a < 0$ 之处。
- 正负号：(i) 的被积函数是正的，所以它的积分应该递增。我们的答案确是如此，因为 $\frac{x+5}{x+1}$ 随 x 增加而递减，所以它的 arcosh 的负值递增。

常见错误

- 把括号配错公式：在 (i) 中，根号外的 $x + 1$ 是常数较小的那个，所以它必定是 $x + a$，即要用 arcosh，而不是 arcsin。
- 忘记了把 $\sqrt{x+3}$ 写成 $\sqrt{2x+6}/\sqrt{2}$ 时所产生的因子 $\sqrt{2}$。
- 漏掉 arcosh 导数中的负号，这个负号来自 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x < 0$。

STEP 之外

(ii) 的两个答案，一个用 arcsin，一个用 arctan，两者相差一个常数。这是必然的，因为在一个区间上导数相同的两个函数只相差一个常数，这是中值定理（mean value theorem）的推论。若集合由两段分开的部分组成，各段上的常数便可以不同。(i) 中出现对数也并非偶然：反双曲函数（inverse hyperbolic functions）其实是乔装了的对数，这正是 $1/\sqrt{\text{二次式}}$ 的积分不是得出反三角函数（inverse trigonometric functions）便是得出对数的原因。Abbott 的 *Understanding Analysis* 严谨地证明了中值定理，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则收录了更多这类积分。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。