详细解答

STEP II 2003，第 9 题

力学 · 极限摩擦力平衡

> **STEP II 2003，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q9

关键思路

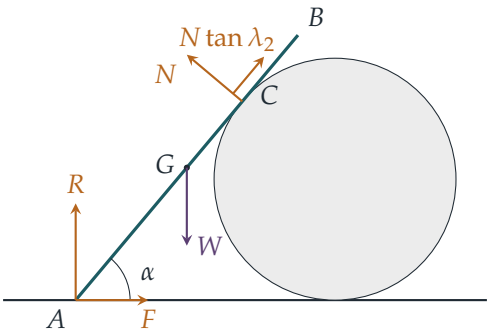
由于摩擦系数（coefficient of friction）是以 $\tan\lambda_1$ 和 $\tan\lambda_2$ 的形式给出，最自然的工具就是*总反作用力*（total reaction，即把法向反作用力（normal reaction）与摩擦力合成为一个力）。当摩擦达到极限（limiting）时，总反作用力与法线的夹角就是摩擦角（angle of friction）λ。这样一来，杆只受三个力作用，而且三个力的方向都已知；沿水平和垂直方向分解（resolve），便得到两条方程，其中只有两个未知的大小。真正要花工夫的，只是判断每个摩擦力指向哪一边。

解答

模型与摩擦力的方向

我们把杆视为均匀（uniform）的刚体（rigid body）杆，并把圆柱视为固定不动。杆沿切线（tangent）与圆柱接触，所以在 C 处的法向反作用力垂直于杆。设圆柱位于 A 的水平正方向一侧。于是作用在杆上的力有：

- 杆的重量 W，作用于中点 G，垂直向下；
- 在 A 处：垂直向上的法向反作用力 R，以及沿地面的摩擦力 F；
- 在 C 处：垂直于杆的法向反作用力 N，指向上方并向后偏往 A 的一边，另有一个沿杆方向的摩擦力。



想一想 在 A 处和在 C 处，摩擦力分别指向哪一边？杆会不会是即将向相反方向滑动？

杆要同时保持两个接触点，就只有一种运动方式：当 A 沿地面滑动时，角 α 随之改变，杆亦在圆柱上滑过。若 A 远离圆柱，杆便会下降（即 α 减小），而杆上位于 C 的那一点相对于圆柱沿杆向下滑动。若 A 移向圆柱，一切就反过来。

在第二种情况下，A 处的摩擦力会指向远离圆柱的方向，而 C 处的摩擦力会沿杆向下。这样三个水平方向的力（A 处的摩擦力、N 的水平分量，以及 C 处摩擦力的水平分量）全都指向远离圆柱的一边，水平方向便不可能平衡。所以在极限平衡（limiting equilibrium）时，杆是即将向下滑：杆在 A 处所受的摩擦力指向圆柱，而 C 处的摩擦力沿杆向上，正如图中所示。

总反作用力

设 S 为 A 处的总反作用力，T 为 C 处的总反作用力。由于两个接触点的摩擦都达到极限：

- S 与向上的垂直线成 λ_1 角，并向圆柱一方倾斜，因为 $F = R\tan\lambda_1$。
- C 处的法线与向上的垂直线成 α 角，并向后偏往 A 的一边，因为杆与水平线成 α 角。沿杆向上的摩擦力使 T 朝垂直线转回 λ_2。所以 T 与向上的垂直线成 $\alpha - \lambda_2$ 角，这个角是在远离圆柱的一侧量度的。

对杆分解各力，

$$\begin{aligned} \text{水平方向：} \quad & S\sin\lambda_1 = T\sin(\alpha - \lambda_2), \\ \text{垂直方向：} \quad & S\cos\lambda_1 + T\cos(\alpha - \lambda_2) = W. \end{aligned}$$

为了消去 T，我们把第一条方程乘以 $\cos(\alpha - \lambda_2)$，把第二条乘以 $\sin(\alpha - \lambda_2)$，再从第二条减去第一条：

$$\begin{aligned} S\left[\cos\lambda_1\sin(\alpha - \lambda_2) + \sin\lambda_1\cos(\alpha - \lambda_2)\right] &= W\sin(\alpha - \lambda_2), \\ S\sin(\alpha + \lambda_1 - \lambda_2) &= W\sin(\alpha - \lambda_2), \end{aligned}$$

这里用了 sin 的复角公式（addition formula）。题目告诉我们 $\alpha \neq \lambda_2 - \lambda_1$，所以 $\sin(\alpha + \lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$（所有角都是锐角，所以 $\alpha + \lambda_1 - \lambda_2$ 严格介乎 $-\frac{\pi}{2}$ 与 π 之间）。因此可以相除：

$$S = \frac{W \sin(\alpha - \lambda_2)}{\sin(\alpha + \lambda_1 - \lambda_2)}.$$

A 处的摩擦力就是 S 的水平分量，即 $F = S \sin \lambda_1$，所以

$$F = \frac{W \sin \lambda_1 \, \sin(\alpha - \lambda_2)}{\sin(\alpha + \lambda_1 - \lambda_2)},$$

这正是所求。同样地，$T = W \sin \lambda_1 / \sin(\alpha + \lambda_1 - \lambda_2)$。

想一想 我们从头到尾都没有取力矩（moment）。这不是很可疑吗?

在这里并不可疑。沿两个方向分解，已足以求出两个未知的大小。对 A 取力矩（S 对该点没有力矩，C 处的摩擦力沿杆作用，同样没有力矩），得 $N \cdot AC = W \cdot AG \cos \alpha$，其中 $N = T \cos \lambda_2$。这只告诉我们，要达到极限平衡，C 必须位于哪里：

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\cos \alpha \, \sin(\alpha + \lambda_1 - \lambda_2)}{2 \sin \lambda_1 \cos \lambda_2}.$$

求摩擦力时，并不需要用到题目所给的条件 $AC > CB$。从物理上说，我们还需要 $S > 0$ 和 $T > 0$，而这恰好在 $\alpha > \lambda_2$ 时成立：杆若以小于 λ_2 的倾角搁在圆柱上，就不可能处于即将沿圆柱滑下的状态。

验算

- 地面光滑，$\lambda_1 = 0$：公式给出 $F = 0$，理应如此。
- $\alpha = \lambda_2$：此时 T 是垂直的，单靠它就把杆托住，而 $F = 0$。这是杆刚好能搁在圆柱上的临界角度。
- 数值验算：取 $\lambda_1 = 0.3$、$\lambda_2 = 0.5$、$\alpha = 1.0$（弧度），直接从分量方程解出 R 和 N，得 $F \approx 0.1975W$，与公式吻合。在这个例子中，再对 A 取力矩，可知 C 大约位于杆长的 0.75 处，与 $AC > CB$ 相符。

常见错误

- 把 C 处的反作用力当成垂直的，或当成垂直于圆柱的“顶部”。反作用力应垂直于公切线，而公切线就是杆本身。
- 选定摩擦力的方向却不加检验。选错了那一对方向，水平方向便不可能平衡。
- 把 C 处的总反作用力向错误的一边倾斜，结果得出 $\alpha + \lambda_2$ 而不是 $\alpha - \lambda_2$。

STEP 之外

取总反作用力与法线成 λ 角，正是摩擦锥（cone of friction）背后的想法：只要总反作用力留在以法线为轴、半顶角为 λ 的圆锥之内，接触点就不会滑动。若只有三个力，它们的作用线（line of action）还必须交于一点，这就把许多静力学（statics）问题变成几何问题。有多个粗糙接触点、而且各接触点滑动的先后次序有影响的问题，是刚体静力学的上佳入门。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对摩擦和刚体平衡有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。