详细解答

STEP II 2003，第 8 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

STEP II 2003，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q8

关键思路

这是一阶可分离变量（separable）的微分方程：$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 等于 t 的一个有理函数（rational function）。把那个二次式除以 $t+1$，这个函数便分拆成一个多项式加一个简单分式，两者都可以立即积分。至于驻点（stationary point），直接由微分方程本身便可得出，无须对解求导：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ 恰好在二次式 t^2-3t+2 等于零之处成立。

解答

求 y

由多项式除法（polynomial division）得

$$\frac{t^2-3t+2}{t+1}=t-4+\frac{6}{t+1},$$

因为 $(t+1)(t-4)+6=t^2-3t-4+6=t^2-3t+2$。

解必须由 $y=A>0$ 出发。假如 y 在某处等于零，则根据这个线性方程的解的唯一性（uniqueness），它必定是零解，这与 $y(0)=A$ 矛盾。所以自始至终 $y>0$（在 $t>-1$ 上，即系数有定义的范围内），因此可以除以 y：

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-k\left(t-4+\frac{6}{t+1}\right).$$

由 0 积分至 t，并利用 $\ln 1=0$，

$$\ln\frac{y}{A}=-k\left(\frac{t^2}{2}-4t+6\ln(t+1)\right),$$

所以

$$\boxed{y = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(t^2/2-4t)} = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{k(8t-t^2)/2}}.$$

驻点值

由微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\,\frac{(t-1)(t-2)}{t+1}\,y.$$

我们假设 $k \neq 0$（否则 $y \equiv A$，每一点都是驻点）。由于 $y > 0$ 及 $t+1 > 0$，导数只在 $t = 1$ 和 $t = 2$ 处等于零，而且因为两者都是单根（simple root），导数在这两处都会变号。所以恰好有两个驻点值（stationary value）：

$$y(1) = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(1/2-4)} = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{7k/2},$$
$$y(2) = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(2-8)} = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{6k}.$$

两者之比为

$$\frac{y(1)}{y(2)} = \frac{3^{6k}}{2^{6k}}\,\mathrm{e}^{7k/2-6k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{6k}\mathrm{e}^{-5k/2},$$

正是所求。

> ? **想一想** 两个驻点值之中，哪一个较大?

取对数：

$$\ln\frac{y(1)}{y(2)} = k\left(6\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right),$$

而 $6\ln 1.5 \approx 2.433 < 2.5$，所以括号内的数是负数（约为 -0.067）。因此当 $k > 0$ 时 $y(1) < y(2)$，当 $k < 0$ 时 $y(1) > y(2)$。两者相差很小，所以图像上的起伏十分平缓。同样地，

$$\ln\frac{y(1)}{A} = k\left(\tfrac{7}{2} - 6\ln 2\right) \approx -0.659k, \qquad \ln\frac{y(2)}{A} = k(6 - 6\ln 3) \approx -0.592k,$$

所以当 $k > 0$ 时两个驻点值都小于 A，当 $k < 0$ 时两个都大于 A。

当 $t \to +\infty$ 时的表现

写成

$$\ln\frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right).$$

当 $t \to \infty$ 时，括号内的式子趋向 $+\infty$，并由 $\frac{1}{2}t^2$ 主导（ln 项的增长慢得多）。所以：

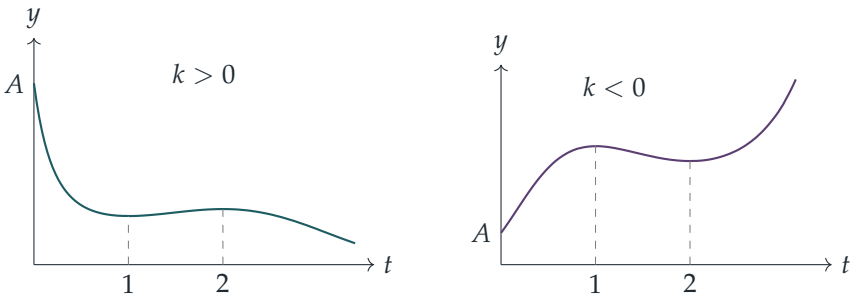
- 若 $k > 0$，则 $\ln(y/A) \to -\infty$，所以 $y \to 0$（速度极快，有如 $\mathrm{e}^{-kt^2/2}$）；
- 若 $k < 0$，则 $\ln(y/A) \to +\infty$，所以 $y \to \infty$（有如 $\mathrm{e}^{|k|t^2/2}$）。

草图

当 $t > 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的正负号与 $-k(t-1)(t-2)$ 的正负号相同。

- $k > 0$：y 在 $(0,1)$ 上由 A 递减，在 $t = 1$ 处达到局部极小值（local minimum），然后上升，在 $t = 2$ 处达到局部极大值（local maximum）（仍然低于 A），其后递减并趋向 0。
- $k < 0$：y 由 A 递增，在 $t = 1$ 处达到局部极大值，然后下降，在 $t = 2$ 处达到局部极小值（仍然高于 A），其后无止境地递增。

以下图像是取 $A = 1$ 及 $k = \pm 2$ 准确绘制的。



验算

- 在 $t = 0$ 处，公式给出 $A \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^0 = A$。对 $\ln y = \ln A - 6k\ln(t+1) - k(t^2/2 - 4t)$ 求导，得 $\frac{y'}{y} = -\frac{6k}{t+1} - k(t-4)$，合并后便回到原来的方程。
- 数值方面，取 $A = 1.5$ 及 $k = \pm 2$，以龙格－库塔法（Runge–Kutta）逐步对微分方程积分，在 $t = 3$ 处所得结果与公式吻合至八位有效数字。取 $k = 2$ 时，比值 $y(1)/y(2)$ 为 0.8742，与 $(1.5)^{12}\mathrm{e}^{-5}$ 相符。

常见错误

- 除法出错：余数是 6，不是 2。可乘回 $t+1$ 来检查。
- 把比值倒转：题目要求的是 $y(1)/y(2)$，而指数中的正负号很容易令人误得 $y(2)/y(1)$。
- 草图中把两个转向点（turning point）画在 A 的错误一侧：先前的计算表明，当 $k > 0$ 时两者都低于 A，当 $k < 0$ 时两者都高于 A。

STEP 之外

这个方程是线性的，形如 $y' + p(t)y = 0$，而它的解 $A\exp\left(-\int_0^t p\right)$ 正是积分因子法（integrating-factor method）最简单的情形。它也说明了你在第一门常微分方程（ODE）课程中会遇到的一个普遍原则：很多时候无须解出方程，便可直接从方程本身看出解的定性特征（驻点、解的正负号、增长或衰减）。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书）对这两个想法都有详细阐述，当中包括我们用来证明 y 永不为零的唯一性定理（uniqueness theorem）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。