详细解答

STEP II 2003，第 7 题

纯数学 · 广义积分与级数

STEP II 2003，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q7

关键思路

形如 $\ln x \times$ (幂，底数为x) 的被积函数（integrand），最适合用分部积分法（integration by parts）处理：对对数求导，它便会消失。第一个积分就这样解决了。题目余下的部分把精确值 $2/(n^2\mathrm{e})$ 反过来用：它让我们可以把 $1/n^2$ 写成一个积分。然后我们把所有积分下限移到同一位置，这样只会令每个积分变大，再在积分号内把一个等比级数（geometric series）加起来。

解答

积分

对 $a > 1$ 及 $n > 0$，设

$$I_n(a) = \int_a^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

取 $u = \ln x$ 及 $\mathrm{d}v = x^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ 作分部积分，于是 $v = -\frac{1}{n}x^{-n}$（这里用到 $n \neq 0$）。在 $[a, X]$ 上，

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{nx^n}\right]_a^X + \frac{1}{n}\int_a^X x^{-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln a}{na^n} - \frac{\ln X}{nX^n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{X^n}\right).\end{aligned}$$

现在令 $X \to \infty$。由于 $n > 0$，$X^{-n} \to 0$。至于另一项，设 $Y = X^n$，则 $\ln X = \frac{1}{n}\ln Y$，并且

$$\frac{\ln X}{X^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\ln Y}{Y} \to 0,$$

因为当 $X \to \infty$ 时 $Y \to \infty$，而题目容许我们假设 $(\ln Y)/Y \to 0$。（这里不能直接引用 $(\ln X)/X \to 0$：当 $0 < n < 1$ 时，X^n 增长得比 X 慢。）所以这个积分收敛（converge），并且

$$I_n(a) = \frac{\ln a}{na^n} + \frac{1}{n^2 a^n}.$$

当 $a = \mathrm{e}^{1/n}$ 时，$a^n = \mathrm{e}$ 且 $\ln a = 1/n$，所以

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) = \frac{1}{n^2\mathrm{e}} + \frac{1}{n^2\mathrm{e}} = \frac{2}{n^2\mathrm{e}},$$

这正是所求的结果。

比较两个积分

若 $1 < a < b$，则

$$I_n(a) - I_n(b) = \int_a^b \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

对 $x > 1$，有 $\ln x > 0$ 及 $x^{n+1} > 0$，所以被积函数在 $[a, b]$ 上严格为正。它同时是连续的，而且 $b > a$，所以这个积分严格为正。因此 $I_n(b) < I_n(a)$：把积分下限向右移，等于舍弃了一块正的面积。

不等式

由第一部分，对每个正整数 n，

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} I_n(\mathrm{e}^{1/n}).$$

> **想一想** 和式中每一项的积分下限 $\mathrm{e}^{1/n}$ 各不相同，但右边只有单一个下限 $\mathrm{e}^{1/N}$。我们怎样由前者过渡到后者？

取 $1 \le n \le N$。那么 $1/N \le 1/n$，所以 $1 < \mathrm{e}^{1/N} \le \mathrm{e}^{1/n}$。当 $n < N$ 时不等式是严格的，而第二部分（取 $a = \mathrm{e}^{1/N}$，$b = \mathrm{e}^{1/n}$）给出

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < I_n(\mathrm{e}^{1/N});$$

当 $n = N$ 时两边相等。对 $n = 1, \ldots, N$ 求和，所得的不等式是严格的，因为 $N > 1$ 意味着最少有一项（例如 $n = 1$）满足 $n < N$：

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}).$$

这正是需要用到 $N > 1$ 的地方。若 $N = 1$，两边便会相等。

余下的工作是把这些积分加起来。有限个在同一范围上收敛的积分之和，等于各被积函数之和的积分，所以

$$\sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}) = \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} \right) \ln x\,\mathrm{d}x.$$

括号内是一个等比级数，首项为 x^{-2}，公比为 $x^{-1} \neq 1$（因为 $x > 1$），共 N 项：

$$\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} = \frac{x^{-2}(1 - x^{-N})}{1 - x^{-1}} = \frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x},$$

这里分子和分母同乘以 x^2。因此

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{2} \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x} \right) \ln x \, \mathrm{d}x,$$

正如所求。

验算

- 把 $I_n(a)$ 的公式对 a 求导：你应该得到 $-\ln a / a^{n+1}$，即被积函数的相反数，正如微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）所要求的。
- 数值上，利用代换（substitution）$x = \mathrm{e}^u$，最后一部分的积分变成 $\int_{1/N}^{\infty} u(1 - \mathrm{e}^{-Nu})/(\mathrm{e}^u - 1) \, \mathrm{d}u$。当 $N = 2$ 时，右边约为 1.4865，而左边是 $1 + \frac{1}{4} = 1.25$。当 $N = 10$ 时，右边约为 2.0579，而左边是 1.5498。
- 当 $N \to \infty$ 时，右边趋向 $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x} \, \mathrm{d}x$，而代换 $x = 1/t$ 把它化为 $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_0^1 \frac{-\ln t}{1 - t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 2.236$。这个值明显大于 $\pi^2/6 \approx 1.645$，而这是必然的。

常见错误

- 直接用 $(\ln X)/X \to 0$ 来消去 $(\ln X)/X^n$。这对 $n \geq 1$ 行得通，但题目的结果是对所有 $n > 0$ 而言的。
- 把积分下限移错方向。由于 $\mathrm{e}^{1/N}$ 是各个 $\mathrm{e}^{1/n}$ 之中最小的，每个积分都会变大。
- 声称不等式是严格的，却没有说明原因。$n = N$ 的一项给出等式，所以严格性来自 $n < N$ 的各项，而这些项之所以存在，是因为 $N > 1$。

STEP 之外

把一个数写成积分，然后在积分号内求和，是分析（analysis）中的标准手法。把这个做法推到极限，便得到 $\sum 1/n^2 = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1 - t} \, \mathrm{d}t$，这是通往 $\pi^2/6$ 的其中一条路径。令 $N \to \infty$，就是把无穷和与反常积分（improper integral）交换次序。这个交换需要论证，要用到单调收敛定理或控制收敛定理（monotone or dominated convergence theorems），你会在大学的第一门分析或测度论（measure theory）课程中遇到它们。Abbott 的 *Understanding Analysis* 写得平易近人，很适合用来了解这类交换为何可能失败，以及何时才是安全的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。