详细解答

STEP II 2003，第 6 题

纯数学 · 迭代函数与积分

> **STEP II 2003，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q6

关键思路

再施行一次 f，意思就是“先减去 1，再把负的部分反射回横轴上方”。若某一段图像的值介乎 0 与 1 之间，这样做只会把该段在带状区域 $0 \le y \le 1$ 内上下倒转，而两条长长的直线臂则各多出一个锯齿。于是图像变成锯齿形（三角波，triangle wave）；看出这一点之后，最后一部分的两个积分都只是若干个相同周期上的积分之和。

解答

略图

整个解答只靠以下两项事实。

递推关系（*recurrence*）。由于 $g_{n+1} = f \circ g_n$，我们有 $g_{n+1}(x) = |g_n(x) - 1|$：把 g_n 的图像向下平移 1，再把位于 x 轴下方的部分反射上去。

对称性（*symmetry*）。由于 $f(2-x) = |1-x| = f(x)$，当 $n \ge 2$ 时可得 $g_n(2-x) = g_{n-1}(f(2-x)) = g_{n-1}(f(x)) = g_n(x)$，而 $n = 1$ 时则可直接验证。所以每个 g_n 都关于直线 $x = 1$ 对称，只需弄清楚 $x \ge 1$ 的情况便可。

先从 $g_1(x) = |x-1|$ 开始，这是一个顶点在 $(1,0)$ 的 V 形。

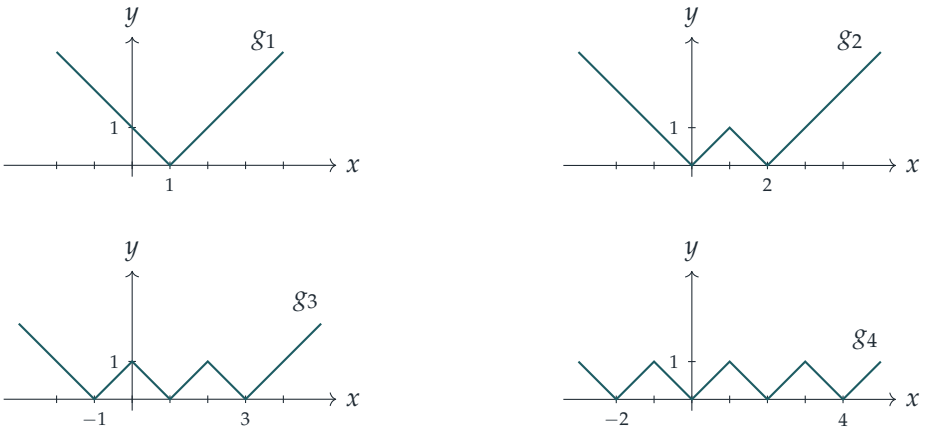
至于 g_2：在 $[0,2]$ 上有 $0 \le g_1 \le 1$，所以 $g_2 = 1 - |x-1|$，是一个帐篷形，在 $x = 1$ 处升至 1，在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 处降至 0。当 $x \ge 2$ 时，$g_2 = x - 2$；由对称性，当 $x \le 0$ 时 $g_2 = -x$。所以 g_2 呈 W 形。

之后每一步都是做同样的事：锯齿部分（取值在 $[0,1]$ 内）上下倒转，而直线臂 $x - n$ 变成 $|x-n-1|$，在 $[n, n+1]$ 上多添一个锯齿（由对称性，在 $[1-n, 2-n]$ 上亦然）。以

$d_{\text{even}}(x)$ 和 $d_{\text{odd}}(x)$ 分别表示 x 与最接近的偶数及最接近的奇数之间的距离，便得

$$g_n(x) = \begin{cases} 2-n-x, & x \le 2-n, \\ d_{\text{even}}(x)\text{(若 } n \text{ 为偶数)}，\ d_{\text{odd}}(x)\text{(若 } n \text{ 为奇数)}， & 2-n \le x \le n, \\ x-n, & x \ge n. \end{cases}$$

这个结果可由递推关系用归纳法（induction）证明：对任意实数 x 都有 $d_{\text{even}} + d_{\text{odd}} = 1$（在两个相邻整数之间，这两个距离分别是 t 和 $1-t$），所以“1 减去锯齿”会把奇偶性对调；而在 $[n, n+1]$ 上，新增的一段 $n+1-x$ 正好是到 $n+1$ 的距离，而 $n+1$ 就是具有新奇偶性的最接近整数。左边的部分则由关于 $x=1$ 的对称性得出。



用文字描述：g_3 的零点在 $-1, 1, 3$，在 0 和 2 处有高度为 1 的尖峰，两臂为 $y = -1 - x$ 和 $y = x - 3$；g_4 的零点在 $-2, 0, 2, 4$，在 $-1, 1, 3$ 处有高度为 1 的尖峰，两臂为 $y = -2 - x$ 和 $y = x - 4$。四个图像都关于 $x = 1$ 对称。

积分

设 n 为偶数。由于 $n \ge 2$，区间 $[0, n]$ 包含在 $[2-n, n]$ 之内，所以在这个区间上 $g_n(x) = d_{\text{even}}(x)$。

> **想一想** 为甚么只需在 $[0, 2]$ 上积分便足够?

两个函数的周期（period）都是 2：$d_{\text{even}}(x+2) = d_{\text{even}}(x)$，因为平移 2 会把偶数映到偶数；而 $\left|\sin \frac{\pi(x+2)}{2}\right| = \left|-\sin \frac{\pi x}{2}\right| = h(x)$。由于 n 是偶数，$[0, n]$ 正好由 $\frac{n}{2}$ 个完整周期 $[0,2], [2,4], \ldots, [n-2, n]$ 组成，所以在 $[0, n]$ 上的每个积分都是在 $[0, 2]$ 上的积分的 $\frac{n}{2}$ 倍。

在 $[0, 2]$ 上，g_n 就是帐篷形 $1 - |x-1|$：一个底为 2、高为 1 的三角形，所以

$$\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

在 $[0,2]$ 上，$\frac{\pi x}{2} \in [0,\pi]$，所以 $\sin\frac{\pi x}{2} \geq 0$，绝对值（modulus）符号可以略去：

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^2 = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

因此

$$\int_0^n \big(h(x)-g_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\Big(\frac{4}{\pi}-1\Big) = \frac{2n}{\pi}-\frac{n}{2},$$

这正是所求。

验算

- 取一个数值，亲手迭代一次：$g_4(-1)$：$-1 \to 2 \to 1 \to 0 \to 1$，所以 $g_4(-1)=1$，是一个尖峰，与略图相符。
- 答案是正数，因为 $4/\pi \approx 1.27 > 1$：正弦拱形比同底同高的直边帐篷形向外鼓出，这与两个图像的形状吻合。
- 数值方面，取 $n=2$ 时用辛普森法则（Simpson's rule）计算得 0.273240，与 $\frac{4}{\pi}-1 \approx 0.273240$ 一致；当 $n=4,6,8,10$ 时同样吻合。

常见错误

- 忘记左边的部分：当 $n \geq 3$ 时，在 $x<0$ 的范围内图像并不是直线。利用对称性 $g_n(2-x)=g_n(x)$ 是把这部分画对的最快方法。
- 在 $[0,n]$ 上积分 $\sin\frac{\pi x}{2}$ 时漏掉绝对值，这样对偶数 n 会得出 0，而不是 $\frac{2n}{\pi}$。

STEP 之外

把一个简单的映射反复迭代，观察图像如何变化，正是离散动力系统（discrete dynamical systems）的起点。这里的锯齿最终稳定成一个三角波，而与之密切相关的"帐篷映射"（tent map）则是混沌（chaos）的经典例子。把 h 与三角波作比较，也引向傅里叶级数（Fourier series）：在那里，三角波会写成正弦与余弦之和，而 $|\sin|$ 是最早遇到的例子之一。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）对傅里叶级数有一段易读的入门介绍。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。