详细解答

STEP II 2003，第 5 题

纯数学 · 直线的向量几何

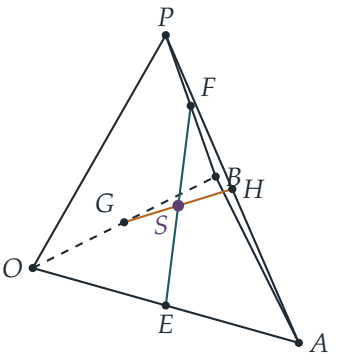
STEP II 2003，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q5

关键思路

先写出四个中点，把每条直线写成“点 + 参数 × 方向”的形式，然后令两者相等。三维空间中的两条直线通常不会相交，因此真正要做的，是证明这三条含两个未知参数的分量方程是相容（consistent）的。**k** 分量很快就能解决问题。从几何上看，O、A、B、P 构成一个四面体（tetrahedron），而 EF 和 GH 各自连接一对对棱的中点。由此可以猜想，它们相交于四个顶点的“平均”位置。



解答

直线 EF 与 GH 相交

设 $\mathbf{p} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$。各中点的位置向量（position vector）为

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}a\mathbf{i}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(l\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}),$$
$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{2}b\mathbf{j}, \qquad \mathbf{h} = \tfrac{1}{2}((a+l)\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}).$$

EF 上的一般点是 $\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})$，而 GH 上的一般点是 $\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})$。把两者都乘以二以消去二分之一，得

$$2(\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})) = (a + s(l-a))\mathbf{i} + s(b+m)\mathbf{j} + sn\,\mathbf{k},$$
$$2(\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})) = t(a+l)\mathbf{i} + (b + t(m-b))\mathbf{j} + tn\,\mathbf{k}.$$

两条直线相交，当且仅当存在 s 和 t 的值使以上两式相等，因此以下三式必须全部成立：

$$\mathbf{i}: \quad a + s(l-a) = t(a+l),$$
$$\mathbf{j}: \quad s(b+m) = b + t(m-b),$$
$$\mathbf{k}: \quad sn = tn.$$

想一想 三条方程、两个未知数：为甚么它们竟然会有解？

一般而言是没有解的，这正是空间中两条直线通常不会相交的原因。这里我们先解其中两条方程，再验证第三条也成立。由于 $n \neq 0$，$\mathbf{k}$ 方程给出 $s = t$。于是 $\mathbf{i}$ 方程变成 $a + sl - sa = sa + sl$，即 $a = 2sa$，而由于 $a \neq 0$，我们得到 $s = \frac{1}{2}$。最后，当 $s = t = \frac{1}{2}$ 时，$\mathbf{j}$ 方程成为

$$\tfrac{1}{2}(b+m) = b + \tfrac{1}{2}(m-b) = \tfrac{1}{2}(b+m),$$

这是成立的。所以当 $s = t = \frac{1}{2}$ 时三条方程全部成立，直线 EF 与 GH 相交，正如所求。

交点是 EF 的中点（也是 GH 的中点）：

$$\mathbf{s} = \tfrac{1}{4}((a+l)\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = \tfrac{1}{4}(\mathbf{0} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{p}),$$

即 O、A、B 和 P 的位置向量的平均。

点 T

由于 S 是 DT 的中点，我们有 $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{t})$，所以 $\mathbf{t} = 2\mathbf{s} - \mathbf{d}$：

$$\mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(a+l)\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(b+m)\,\mathbf{j} + (\tfrac{1}{2}n - d)\mathbf{k}.$$

平面 OAB 包含 O 以及向量 $a\mathbf{i}$ 和 $b\mathbf{j}$。由于 a 和 b 均不为零，这两个向量分别沿 x 轴和 y 轴的方向，所以平面 OAB 就是平面 $z = 0$。因此 T 位于该平面上，当且仅当它的 $\mathbf{k}$ 分量

为零，即 $\frac{1}{2}n - d = 0$。故此

$$d = \tfrac{1}{2}n.$$

由于 $n \neq 0$，这个值不为零，所以与条件 $d \neq 0$ 并无矛盾。

验算

- 取 $a = 2, b = 4, \mathbf{p} = (2,0,4)$。则 $E = (1,0,0), F = (1,2,2), G = (0,2,0), H = (2,0,2)$。$EF$ 和 GH 的中点都是 $(1,1,1)$，亦即 $\frac{1}{4}\big((0,0,0) + (2,0,0) + (0,4,0) + (2,0,4)\big)$。
- 取 $d = 2 = \frac{1}{2}n$，则 $T = 2(1,1,1) - (0,0,2) = (2,2,0)$，它位于 $z = 0$ 上。
- 我们以电脑用精确的有理数运算，对 20 000 组随机选取的 a, b, l, m, n, d 作了检验，确认两条直线在 $s = t = \frac{1}{2}$ 时相交于上述的点，并且 T 位于平面 OAB 上（纯量三重积（scalar triple product）为零）当且仅当 $d = \frac{1}{2}n$。

常见错误

- 一开始就用同一个参数来令两条直线相等。这样做等于预先假设了答案 $s = t$，而在这里它是由 **k** 方程推出来的。
- 解了其中两条分量方程就停下来。要证明空间中两条直线相交，还必须验证第三条方程。
- 忘记说明在哪里用到 $a \neq 0$ 和 $n \neq 0$：正是有了这两个条件，我们才可以作除法求出 s 和 t。

STEP 之外

任何四面体中，连接对棱中点的三条直线（称为双中线（bimedians））全都通过它的形心（centroid），即四个顶点的平均，并且各自在该点被平分。这是“三角形的中线（median）交于形心”在三维空间中的近亲，也让我们初次体会到把点看成加权平均的想法，而这正是重心坐标（barycentric coordinates）和仿射坐标（affine coordinates）背后的概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）详细阐述了这里所用的向量与线性方程观点，包括方程数目多于未知数的方程组在甚么情况下相容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。