详细解答

STEP II 2003，第 4 题

纯数学 • 弓形的面积

STEP II 2003，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q4

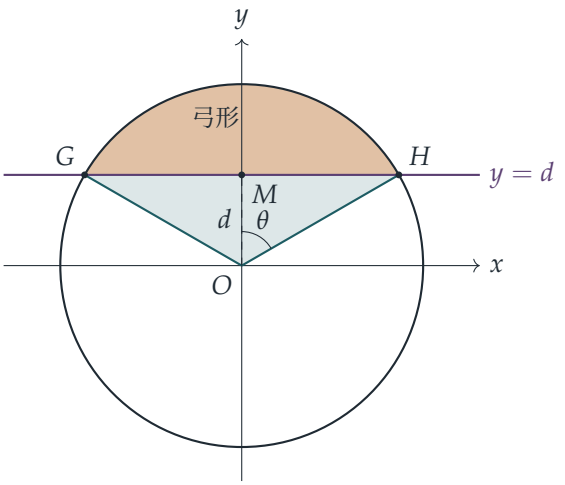
关键思路

劣弓形（minor segment）就是扇形（sector）减去一个三角形，所以第一个结果不过是“扇形减三角形”。至于其余部分，留意在 $(*)$ 中，d 这个数其实是圆心到直线的垂直距离（*perpendicular distance*）。把图形平移或旋转都不会改变任何面积，所以在每一种情况下，我们都保留 $(*)$，只把 d 换成该距离。全部工夫都在于计算这个距离。

解答

基本结果

由于直线与圆相交于两点，故 $0 < d < R$。把 $y = d$ 代入 $x^2 + y^2 = R^2$ 得 $x = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$，所以 $G = (-\sqrt{R^2 - d^2}, d)$ 及 $H = (\sqrt{R^2 - d^2}, d)$。设 $M = (0, d)$ 为 GH 的中点，并设 $\theta = \angle MOH$。



在直角三角形 OMH 中，斜边（hypotenuse）为 $OH = R$，邻边为 $OM = d$，所以 $\cos\theta = d/R$。由于 $0 < d/R < 1$，我们有 $\theta = \arccos(d/R)$，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，而根据对称性，$\angle GOH = 2\theta < \pi$。

圆心角为 2θ 的扇形 OGH，面积为

$$\tfrac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right).$$

三角形 OGH 的底为 $GH = 2\sqrt{R^2 - d^2}$，高为 $OM = d$，所以其面积为 $d\sqrt{R^2 - d^2}$。因为 $2\theta < \pi$，圆心 O 与劣弧（minor arc）分别位于 GH 的两侧，所以扇形恰好就是三角形加上劣弓形。因此

$$\text{劣弓形的面积} = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right) - d\sqrt{R^2 - d^2},$$

这就是 $(*)$。

想一想 从几何的角度看，$(*)$ 中的 d 究竟代表甚么？

上述论证完全没有用到坐标轴：它只用到半径 R，以及圆心到弦（chord）的距离 $OM = d$。把整个图形平移（translation）或旋转（rotation），这两个量都保持不变，面积亦保持不变。所以对于任何半径为 R 的圆，以及任何与圆心的垂直距离为 p 的直线，其中 $0 \le p < R$，劣弓形的面积为

$$R^2 \arccos\left(\frac{p}{R}\right) - p\sqrt{R^2 - p^2}. \qquad (\dagger)$$

（若 $p = 0$，直线就是直径，两部分是相等的两半，而 $(\dagger)$ 正确地给出 $\frac{1}{2}\pi R^2$。）在每一部分中，我们求出 p，再代入 $(\dagger)$。

第 (i) 部分

圆心为 (a,b)，而直线 $y=c$ 是水平线，所以圆心到直线的距离为 $p=|c-b|$。把 d 换成 $|c-b|$：

$$R^2\arccos\left(\frac{|c-b|}{R}\right)-|c-b|\sqrt{R^2-(c-b)^2}.$$

这里的绝对值（modulus）不可省略：c 可能小于 b。

第 (ii) 部分

这里圆心为 O。我们需要求 O 到 $y=mx+c$ 的距离。设直线与 x 轴的夹角为 α，故 $\tan\alpha=m$，并设直线与 y 轴相交于 $C=(0,c)$。由 O 向直线作垂线，垂足为 F。OC（铅垂）与 OF（垂直于直线）之间的夹角，等于水平线与该直线之间的夹角，即 α。所以在直角三角形 OFC 中，

$$p=OF=|c|\,|\cos\alpha|=\frac{|c|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

（这就是常用公式 $|Ax_0+By_0+C|/\sqrt{A^2+B^2}$ 应用于直线 $mx-y+c=0$ 和点 $(0,0)$ 的结果。）于是

$$\sqrt{R^2-p^2}=\sqrt{R^2-\frac{c^2}{1+m^2}}=\frac{\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{\sqrt{1+m^2}},$$

所以劣弓形的面积为

$$R^2\arccos\left(\frac{|c|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c|\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{1+m^2}.$$

直线与圆相交，当且仅当 $c^2<R^2(1+m^2)$，所以平方根是实数。

第 (iii) 部分

设 $X=x-a$、$Y=y-b$，把原点移到圆心。圆变成 $X^2+Y^2=R^2$，而直线变成

$$Y+b=m(X+a)+c \quad\Longleftrightarrow\quad Y=mX+k, \qquad k=c+ma-b.$$

这就是把 c 换成 k 的第 (ii) 部分，而平移不会改变面积。所以 $p=|c+ma-b|/\sqrt{1+m^2}$，劣弓形的面积为

$$R^2\arccos\left(\frac{|c+ma-b|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c+ma-b|\sqrt{R^2(1+m^2)-(c+ma-b)^2}}{1+m^2}.$$

代入 $m=0$ 便得回第 (i) 部分，代入 $a=b=0$ 便得回第 (ii) 部分。

想一想 为甚么在第 (i) 部分不能直接写 $c-b$ 而不加绝对值?

若 $c < b$，则 $(c-b)/R$ 为负数，arccos 给出的角是大于 $\frac{\pi}{2}$ 的 $\pi - \theta$，而第二项亦会变号。该式变成 $R^2(\pi-\theta) + p\sqrt{R^2-p^2}$，这是优弓形（major segment）的面积，而不是劣弓形的面积。

验算

- 取 $R = 2$、$d = 1$，得 $\theta = \frac{\pi}{3}$，而 $(*)$ 给出 $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.4567$。这小于圆盘面积的一半（$2\pi \approx 6.28$），与预期相符。
- 当 $d \to R$ 时，面积趋向 0；而当 $d = 0$ 时，面积等于 $\frac{1}{2}\pi R^2$。
- 我们随机选取了数百组圆和直线，把全部四条公式与直接对弦长作数值积分（numerical integration）的结果比较，两者相差不超过 2×10^{-6}。

常见错误

- 漏掉绝对值。每当圆心位于直线“错”的一侧，带正负号的距离便会给出优弓形的面积。
- 在第 (ii) 和第 (iii) 部分，用了铅垂距离 $|c|$，而不是垂直距离 $|c|/\sqrt{1+m^2}$。
- 用 $\frac{1}{2}R^2\theta$ 计算扇形面积，忘记了圆心角是 2θ 而不是 θ。

STEP 之外

这道题建基于一个事实：面积在等距变换（isometry）之下保持不变，等距变换即平面上的平移、旋转和反射（reflection）。在大学一年级的课程中，这会变成以下的说法：等距变换的雅可比行列式（Jacobian determinant）的绝对值为 1，所以二重积分（double integral）的变量代换公式不会改变面积。把等距变换分类，并找出它们所保持的量，是进入几何学和群论（group theory）的一条好途径。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）讲述了旋转矩阵，以及行列式作为面积比例因子的角色。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。