详细解答

STEP II 2003，第 3 题

纯数学 · 无理数与数学归纳法

STEP II 2003，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q3

关键思路

无理性（irrationality）是一种“不是”型的性质，所以最自然的工具是逆否命题（contrapositive）：与其证明无理数（irrational number）的立方根（cube root）是无理数，不如证明立方根若是有理数（rational number），原数本身就必定是有理数。之后的归纳法（induction）全靠这一个事实推动，因为每个 u_{n+1} 都是 u_n 的立方根。至于最后一部分，我们留意到 $u_n \to 1$，于是把整个数列（sequence）平移一个整数，这样每一项仍然是无理数。

解答

无理数的立方根

设 x 为实数，并设 $y = \sqrt[3]{x}$ 为它的实立方根，即 $y^3 = x$。我们证明逆否命题：若 y 是有理数，则 x 是有理数。

假设 $y = \dfrac{p}{q}$，其中 p, q 为整数且 $q \neq 0$。那么

$$x = y^3 = \frac{p^3}{q^3},$$

而 p^3 和 q^3 都是整数，且 $q^3 \neq 0$。所以 x 是两个整数之比，也就是有理数。

因此，有理的立方根只能来自有理数。换言之，若 x 是无理数，则 $\sqrt[3]{x}$ 不可能是有理数，所以它是无理数。这正是我们要证明的结论。

? **想一想** 为甚么不直接处理原命题?

直接证明要从“x 不是整数之比”出发，但这句话没有提供任何具体的东西可供计算。逆否命题则从“$y = p/q$”出发，马上给了我们可以运算的整数，于是一行就证完了。每当假设说某个数*不是*有理数时，都值得试试逆否命题或反证法（proof by contradiction）。

归纳法

由于 $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$，根据指数定律（laws of indices），

$$u_{n+1} = 5^{1/3^{n+1}} = \left(5^{1/3^n}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{u_n}.$$

所以每一项都是前一项的立方根。

基础情况。$u_1 = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$，题目已告诉我们它是无理数。

归纳步骤。假设对某个正整数 k，u_k 是无理数。那么 $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k}$ 是一个无理数的立方根，所以根据第一部分，它是无理数。

因此，根据归纳法，对所有正整数 n，u_n 都是无理数。

收敛至 m 的数列

首先求 u_n 的极限（limit）。取对数（logarithm），

$$\ln u_n = \frac{\ln 5}{3^n} \to 0 \quad \text{当} n \to \infty,$$

而由于指数函数是连续（continuous）的，$u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \to \mathrm{e}^0 = 1$。此外 $\ln u_n > 0$，所以对所有 n 都有 $u_n > 1$；各项递减并趋向 1：

$$u_1 \approx 1.710, \quad u_2 \approx 1.196, \quad u_3 \approx 1.061, \quad u_4 \approx 1.020, \ldots$$

> ? **想一想** 怎样把极限由 1 移到 m，而又不破坏无理性?

无理数加上一个整数，结果仍是无理数。事实上，若 a 是整数，而 $u + a = r$ 是有理数，那么 $u = r - a$ 也会是有理数，因为两个有理数之差是有理数。

所以，对给定的整数 m，定义

$$a_n = u_n + m - 1 = 5^{1/3^n} + m - 1.$$

由于 $m - 1$ 是整数而 u_n 是无理数，每个 a_n 都是无理数，而且

$$a_n \to 1 + m - 1 = m \quad \text{当} n \to \infty.$$

所以 (a_n) 是一个由无理数组成、收敛（converge）至 m 的无穷数列。这个构造对任何整数 m 都适用，包括 $m = 0$。

（另一个自然的选择是 $m\,u_n$，它同样是无理数并趋向 m，但只限于 $m \neq 0$ 的情况：当 $m = 0$ 时，每一项都是 0，是有理数。所以平移 $m - 1$ 才是较稳妥的答案。）

验算

- 数值上，$u_2^3 \approx 1.19581^3 \approx 1.70998 \approx u_1$，印证了 $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}$。
- 取 $m = 4$：$a_1 \approx 4.710$，$a_2 \approx 4.196$，$a_3 \approx 4.061$，而 a_{20} 与 4 相符至小数点后八位以上。
- 差 $a_n - m = u_n - 1$ 是正数，大小约为 $\ln 5/3^n$，所以每一步大约缩小至原来的 3 分之一。

常见错误

- 证明了逆命题（converse）（“无理数的立方是无理数”），而这个命题是错的：$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$。
- 使用 $m\,u_n$，却没有留意到它在 $m = 0$ 时失效。
- 忘记说明为何 $u_n \to 1$；“指数趋向零”这句话还需要交代一下连续性，或者用上面的对数论证。

STEP 之外

这道题显示无理数在实数线上是稠密（dense）的：每一个实数，而不仅是每一个整数，都是无理数的极限（试试 $q_n + \sqrt{2}/n$，其中有理数 $q_n \to x$）。有理数同样稠密，但在某个精确的意义下，无理数远比有理数多：有理数是可数（countable）的，而实数则不是。Abbott 的 *Understanding Analysis* 在开首几章对稠密性、可数性和数列的极限有十分精彩的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。