详细解答

STEP II 2003，第 2 题

纯数学 · 反三角函数

STEP II 2003，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q2

关键思路

$a\cos\theta + b\sin\theta$ 这类式子，总可以写成单一个余弦 $R\cos(\theta - \alpha)$。这样一来，方程就变成一个关于 arccos 的命题，而 α 本身则是一个 arctan。因此，只要找到一个漂亮的解 θ，关于 π 的恒等式（identity）不过是把“$\theta = (\theta - \alpha) + \alpha$”改写一下而已。唯一真正要小心的地方，是验证每个角都落在所用反函数（inverse function）的值域（range）之内。

解答

第一个恒等式

先试 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内最容易想到的角。取 $\theta = \frac{1}{3}\pi$，

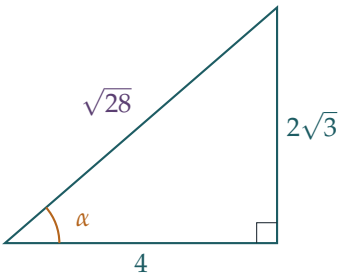
$$4\cos\tfrac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,\sin\tfrac{\pi}{3} = 4\cdot\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 3 = 5,$$

所以 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 满足方程，而且 $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{3}\pi < \frac{1}{2}\pi$。

现在把左方写成 $R\cos(\theta - \alpha) = R\cos\theta\cos\alpha + R\sin\theta\sin\alpha$ 的形式。比较系数，

$$R\cos\alpha = 4, \qquad R\sin\alpha = 2\sqrt{3},$$

所以 $R^2 = 16 + 12 = 28$，得 $R = \sqrt{28}$，而 $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$。由于 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 皆为正数，我们可以取 α 为锐角，所以 $\alpha = \arctan(\sqrt{3}/2)$。



于是方程变成

$$\sqrt{28}\cos(\theta-\alpha)=5,\qquad \text{即}\qquad \cos(\theta-\alpha)=\frac{5}{\sqrt{28}},$$

而 $\theta=\frac{1}{3}\pi$ 满足此方程。

想一想 我们可以立即断定 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$ 吗?

还不可以：$\cos x=c$ 有很多个解，而 $\arccos c$ 只是其中位于 $[0,\pi]$ 的那一个。所以我们必须验证 $\frac{1}{3}\pi-\alpha$ 位于 $[0,\pi]$ 之内。由于 $\tan$ 在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上是递增的，而 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$，故有 $0<\alpha<\frac{1}{3}\pi$。因此

$$0<\tfrac{1}{3}\pi-\alpha<\tfrac{1}{3}\pi\le\pi,$$

所以 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$。移项后乘以 3，

$$\pi=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\alpha=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\arctan(\sqrt{3}/2),$$

这正是所要证明的结果。

第二个恒等式

沿用同一个想法：我们想得到 $\frac{1}{4}\pi=\arcsin(7\sqrt{2}/10)-\arctan(3/4)$，所以设 $\beta=\arctan(3/4)$，然后考虑 $\sin(\frac{1}{4}\pi+\beta)$。

由于 $0<\frac{3}{4}$，β 是锐角；再由 3–4–5 直角三角形，可得 $\sin\beta=\frac{3}{5}$ 及 $\cos\beta=\frac{4}{5}$。于是，根据复角公式（addition formula），

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi+\beta\right)&=\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

想一想 $\frac{1}{4}\pi+\beta$ 真的就是 arcsin 所给出的那个角吗?

arcsin 的值域是 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$，所以我们需要 $\frac{1}{4}\pi + \beta$ 落在这个区间内。因为 $\tan\beta = \frac{3}{4} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$，而 tan 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上是递增的，故有 $0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$，所以

$$\tfrac{1}{4}\pi < \tfrac{1}{4}\pi + \beta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

因此 $\arcsin(7\sqrt{2}/10) = \frac{1}{4}\pi + \arctan(3/4)$，乘以 4 再移项，

$$\pi = 4\arcsin(7\sqrt{2}/10) - 4\arctan(3/4),$$

这就是所求的结果。

验算

以数值计算，$\arctan(\sqrt{3}/2) \approx 0.713724$ 及 $\arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.333473$；两者之和为 $1.047198 \approx \pi/3$，其三倍为 3.141593。至于第二个恒等式，$\arcsin(7\sqrt{2}/10) \approx 1.428899$ 及 $\arctan(3/4) \approx 0.643501$；两者之差为 $0.785398 \approx \pi/4$。快速检查一下亦可见，$\frac{1}{3}\pi$ 是方程在 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内的唯一解：附近的另一个解 $\alpha - \arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.380$ 小于 $\frac{1}{4}\pi$。

常见错误

- 没有验证 $x \in [0, \pi]$ 就写下 $\arccos(\cos x) = x$（或没有验证 $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 就写下 $\arcsin(\sin x) = x$）。严谨性的分数正正就在这里。
- 把 $\tan\alpha$ 上下颠倒：由 $R\cos\alpha = 4$、$R\sin\alpha = 2\sqrt{3}$ 得到的是 $\tan\alpha = 2\sqrt{3}/4$，而不是 $4/(2\sqrt{3})$。

STEP 之外

把 π 表示成反正切（inverse tangent）组合的恒等式，是梅钦类公式（Machin-type formulae）的基础，例如 $\frac{1}{4}\pi = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$。由于 $\arctan x$ 的级数（series）在 x 很小时收敛（converge）得很快，这类公式曾被用来计算 π 至许多个位数。要看清这些恒等式，最简洁的方法是通过复数（complex numbers）：$\arctan(b/a)$ 是 $a + b\mathrm{i}$ 的辐角（argument），所以反正切相加就对应于复数相乘。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这个几何观点阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。