详细解答

STEP II 2003，第 12 题

概率与统计 · 分支过程

STEP II 2003，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q12

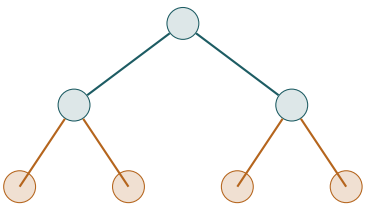
本题在 *Beyond STEP* 第 12.15 节灭绝还是爆发中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/branching.html

关键思路

这是一个分支过程（branching process）：每一代都由上一代产生，而每颗粒子各自独立地分裂。整道题只靠一个事实：若 m 颗粒子各自独立地产生后代，而每颗的后代数目服从 $\mathrm{B}(2, p)$，则后代总数服从 $\mathrm{B}(2m, p)$。因此，无论是求概率还是求期望值（expectation），我们都以上一代的大小作为条件。

解答

我们按照模型的原意，假设不同粒子的衰变彼此独立，亦与过去的情况独立。记 $X_0 = 1$，代表在 $0 < t < T$ 期间存活的那一颗粒子。在 $t = nT$ 时，存活的 X_{n-1} 颗粒子各自被自己的后代取代，所以 X_n 就是第 $n-1$ 代的后代总数。



$X_0 = 1$

$X_1 = 2$

$X_2 \leq 4$

图中所示为 $X_1 = 2$ 的情况：这两颗粒子合共最多有四个后代，而四个可能的后代各自以

概率 p 独立地诞生。

联合概率

由于 $X_1 \sim \mathrm{B}(2,p)$，我们有 $\mathrm{P}(X_1=2)=p^2$。已知 $X_1=2$ 时，两颗粒子各自独立地产生后代，每颗的后代数目服从 $\mathrm{B}(2,p)$，所以 X_2 就是 4 次独立试验中成功的次数，而每次成功的概率为 p；即 $X_2 \mid X_1=2 \sim \mathrm{B}(4,p)$。因此

$$\mathrm{P}(X_1=2 \text{及} X_2=2)=\mathrm{P}(X_1=2)\,\mathrm{P}(X_2=2 \mid X_1=2)=p^2\cdot\binom{4}{2}p^2q^2=6p^4q^2,$$

正如题目所求。

条件概率

要运用条件概率（conditional probability）的定义，我们需要 $\mathrm{P}(X_2=2)$，这可以通过以 X_1 为条件求得：

- 若 $X_1=0$，整个群体已经灭绝，所以 $X_2=0$；
- 若 $X_1=1$（概率为 $2pq$），则 $X_2\sim\mathrm{B}(2,p)$，而 $\mathrm{P}(X_2=2 \mid X_1=1)=p^2$；
- 若 $X_1=2$，其贡献就是刚才求得的 $6p^4q^2$。

所以

$$\mathrm{P}(X_2=2)=2pq\cdot p^2+6p^4q^2=2p^3q\,(1+3pq),$$

因此，当 $0<p<1$ 时，

$$\mathrm{P}(X_1=2 \mid X_2=2)=\frac{6p^4q^2}{2p^3q(1+3pq)}=\frac{3pq}{1+3pq}.$$

令上式等于 $\frac{9}{25}$，得 $75pq=9+27pq$，所以 $48pq=9$，即 $pq=\frac{3}{16}$。代入 $q=1-p$，这就是

$$p^2-p+\tfrac{3}{16}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (p-\tfrac14)(p-\tfrac34)=0,$$

所以 $p=\frac14$ 或 $p=\frac34$。（$p=0$ 和 $p=1$ 这两种情况须排除：当 $p=0$ 时，事件 $X_2=2$ 不可能发生；当 $p=1$ 时，条件概率为 0。）

> **想一想** 为甚么 p 的两个值会给出相同的答案?

条件概率只通过 $pq=p(1-p)$ 依赖于 p，而把 p 换成 $1-p$ 时，这个量保持不变。所以方程的根必定成对出现，即 p 与 $1-p$，在这里就是 $\frac14$ 和 $\frac34$。

期望值

设 $X_{n-1} = m$。这 m 颗粒子每颗平均产生 $\mathrm{E}(X) = 2p$ 个后代，所以下一代大小的期望值为 $2pm$：

$$\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1} = m) = 2pm.$$

对 m 的所有可能取值求平均（全期望值定律，law of total expectation），

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_m \mathrm{P}(X_{n-1} = m)\, 2pm = 2p\,\mathrm{E}(X_{n-1}).$$

用文字来说：在某一段时间内存活的每颗粒子，平均为下一段时间贡献 $2p$ 颗粒子。由于 $\mathrm{E}(X_1) = 2p$（或 $\mathrm{E}(X_0) = 1$），这个递推关系（recurrence）给出一个等比数列（geometric sequence）：

$$\mathrm{E}(X_n) = (2p)^n.$$

极限

当 $p = \frac{1}{4}$ 时，我们得到 $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$（当 $n \to \infty$），因为 $0 < \frac{1}{2} < 1$。

当 $p = \frac{3}{4}$ 时，我们得到 $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$，因为 $\frac{3}{2} > 1$。

由此可见，p 的这两个值在条件概率中看似毫无分别，长远表现却截然不同：平均而言，当 $p = \frac{1}{4}$ 时群体逐渐消亡，而当 $p = \frac{3}{4}$ 时群体则急剧膨胀。

验算

- 取 $p = \frac{3}{4}$：$6p^4q^2 = \frac{243}{2048} \approx 0.1187$，而模拟 10^6 个两代群体所得的结果是 0.1186。
- 当 $p = \frac{1}{4}$ 时，$pq = \frac{3}{16}$，所以 $3pq = \frac{9}{16}$，而 $\dfrac{9/16}{25/16} = \frac{9}{25}$，与预期相符。
- 对若干个 p 值计算 $X_1, \ldots, X_5$ 的精确分布（已知上一代时，每一代服从 $\mathrm{B}(2m, p)$），所得的平均值恰好是 $(2p)^n$。

常见错误

- 在求 $\mathrm{P}(X_2 = 2)$ 时，遗漏了 $X_1 = 1$、$X_2 = 2$ 这条路径；至于经过 $X_1 = 0$ 的路径，其贡献确实为零。
- 把 $X_2 \mid X_1 = 2$ 当作 $2 \times \mathrm{B}(2, p)$（即一颗粒子后代数目的两倍），而不是两个独立副本之和，后者才是 $\mathrm{B}(4, p)$。

STEP 之外

这是一个高尔顿–沃森（Galton–Watson）分支过程，最初是为了解释姓氏为何会消失而提出的。后代数目的平均值 $\mu = 2p$ 决定了一切：若 $\mu \le 1$，群体以概率 1 灭绝；若 $\mu > 1$，群体则有正概率永远存活下去。即使 $p = \frac{3}{4}$，群体仍然有 $\frac{1}{9}$ 的概率灭绝，这个数值是 $s = (q + ps)^2$ 的最小根，而这条方程来自概率母函数（probability generating function）。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）以母函数处理分支过程，其讲法正好可以直接承接本题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。