详细解答

STEP II 2003，第 11 题

力学 • 抛体运动

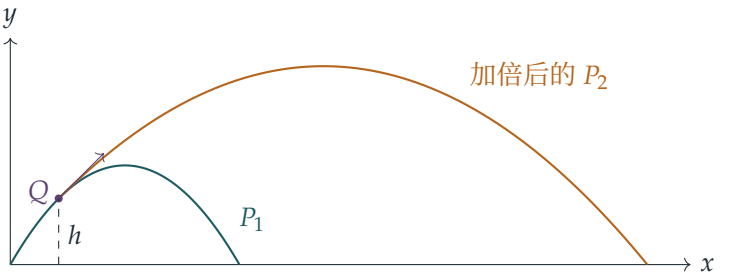
> **STEP II 2003，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q11

关键思路

把速度的水平分量和垂直分量分开处理。运动方向与水平线成 45°，正正就是两个分量相等的时候，由此可直接求出第一个时刻。速率加倍时方向不变，所以两个分量都加倍，而余下的飞行过程就是一个从已知高度出发的新抛体问题。

解答

我们把每个质点（particle）都当作只受重力作用的点状抛体（projectile），不计空气阻力。记 $s = \sin\alpha$ 及 $c = \cos\alpha$。由于 $\alpha > 45°$，我们有 $s > c > 0$。



此草图取 $\alpha = 60°$。两个质点都沿青绿色的路径运动至 Q，运动方向在该处首次与水平线成 45°。其后 P_2 沿琥珀色的路径运动。

P_1 的飞行时间

在时间 t 的垂直位移（displacement）是 $y = Vs\,t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(Vs - \frac{1}{2}gt\right)$。它再次为零的时刻是

$$T_1 = \frac{2V\sin\alpha}{g}.$$

首个 45° 时刻

在时间 t，速度的分量（component）是

$$\dot{x} = Vc, \qquad \dot{y} = Vs - gt.$$

水平分量始终不变。发射时运动方向比 45° 更陡，因为 $\dot{y} = Vs > Vc = \dot{x}$。随着 $\dot{y}$ 减小，当 $\dot{y} = \dot{x}$ 时，角度首次降至 45°，此时质点仍在上升：

$$Vs - gt_1 = Vc \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{V(s-c)}{g}.$$

（下降途中当 $\dot{y} = -Vc$ 时，运动方向会再次成 45°，但那是较后的事。）由于 $\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$，

$$t_1 = \frac{Vs}{g}\left(1 - \frac{c}{s}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \cot\alpha)\,T_1,$$

正如所求。

P_2 的飞行

在时间 t_1 之前，P_2 的运动与 P_1 完全相同。在 t_1 时，速度的两个分量都等于 Vc，而高度是

$$\begin{aligned} h = Vs\,t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 &= \frac{V^2}{g}\left[s(s-c) - \tfrac{1}{2}(s-c)^2\right] \\ &= \frac{V^2}{2g}(s-c)[2s - (s-c)] = \frac{V^2}{2g}\,(s^2 - c^2). \end{aligned}$$

由于 $s > c$，这是正数。

> **想一想** “速率加倍”对速度的每个分量有甚么影响?

速率改变了，但方向不变，所以整个速度向量（velocity vector）乘以 2。两个分量都变成 $2Vc$：质点从高度 h 出发，方向在水平线之上 45°，速率为 $2\sqrt{2}\,Vc$。

设 τ 为由速率加倍至 P_2 着地所经过的时间。以 Q 为起点、向上为正量度垂直位移，着地即位移为 $-h$：

$$2Vc\,\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = -\frac{V^2}{2g}(s^2 - c^2).$$

两边乘以 $-2/g$，并记 $\tau = (V/g)u$，其中 u 是无量纲（dimensionless）的量：

$$u^2 - 4cu - (s^2 - c^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 2c \pm \sqrt{4c^2 + s^2 - c^2} = 2c \pm \sqrt{s^2 + 3c^2}.$$

两根之积是 $-(s^2 - c^2) < 0$，所以其中一个根是负数。我们需要 $\tau > 0$，故取正号：

$$\tau = \frac{V}{g}\left(2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

因此

$$T_2 = t_1 + \tau = \frac{V}{g}\left(s - c + 2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right) = \frac{V}{g}\left(s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

除以 $\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$，并利用 $\sqrt{s^2 + 3c^2}/s = \sqrt{1 + 3c^2/s^2}$ （因 $s > 0$ 而成立）：

$$\frac{2T_2}{T_1} = \frac{s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}}{s} = 1 + \cot\alpha + \sqrt{1 + 3\cot^2\alpha},$$

这就是所要求的结果。

验算

- 当 $\alpha \to 90^\circ$ 时，$\cot\alpha \to 0$，比值趋向 2。这合乎常理：45° 时刻此时就是飞行的最高点，该处速率为零，所以加倍毫无作用，$T_2 = T_1$。
- 当 $\alpha = 45^\circ$（边界情况）时，加倍在发射一刻发生，所以 P_2 其实就是以 $2V$ 抛出，而 $T_2 = 2T_1$。公式给出 $1 + 1 + 2 = 4$，两者吻合。
- 当 $\alpha = 60^\circ$ 时，$t_1/T_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.2113$，而 $2T_2/T_1 = 1 + 1/\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 2.9916$。对 P_2 的飞行以数值方法逐步模拟，随机选取 2000 组 α 和 V，结果均与 T_2 的公式相符。

常见错误

- 只把垂直分量加倍，或只把水平分量加倍。方向不变，所以两个分量都加倍。
- 让 P_2 从地面重新开始运动，而不是从高度 h 开始。
- 没有检查正负号就取了 τ 的负根。

STEP 之外

速度的瞬时改变是一个*冲量*（impulse）：一个极大的力作用了极短的时间。大学一年级的力学正是用冲量来处理碰撞、火箭点火和踢球等情况。把一条轨迹分成若干段，各段

之间以冲量相接，正是规划轨道机动（orbital manoeuvre）的方法：引擎短暂点火，就能把太空船从一条圆锥曲线（conic）轨道转移到另一条。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对冲量和动量（momentum）有严谨的阐述，并收录了许多这类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。