详细解答

STEP II 2003，第 10 题

力学 • 涉及摩擦力的约束运动

STEP II 2003，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s2-q10

关键思路

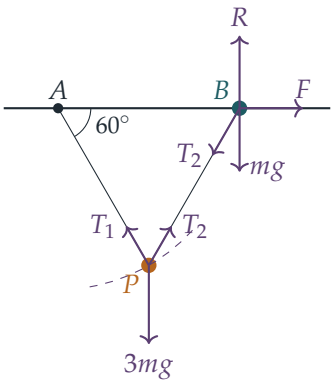
开始时，$AP = PB = AB = \ell$，所以 APB 是等边三角形（equilateral triangle）。由于 AP 一直拉紧，P 沿着以 A 为圆心的圆运动。整个系统由静止开始，所以没有向心（centripetal）项，P 的初始加速度（acceleration）必定沿着该圆的切线（tangent）方向，这就确定了它的方向。其次，P 始终位于以 AB 为底的等腰三角形（isosceles triangle）的顶点，所以 P 的水平位置永远是 B 的一半。至于最后一部分，分别对 B 和 P 写出牛顿第二定律（Newton's second law）。对 P 沿其加速度方向（垂直于 AP）分解，AP 中的张力（tension）便完全不会出现。

解答

我们把 B 和 P 视为质点（particle），并把绳视为轻而不可伸长（light and inextensible）。绳的两半都保持拉紧。取 A 为原点，金属线沿 x 轴，B 最初位于 $(\ell, 0)$。设 θ 为角 PAB。由于 $AP = PB = \ell$，

$$B = (2\ell\cos\theta,\, 0), \qquad P = (\ell\cos\theta,\, -\ell\sin\theta),$$

而开始时 $\theta = \frac{\pi}{3}$。



P 的加速度方向

由于 $AP = \ell$ 固定不变，P 沿着以 A 为圆心、半径为 ℓ 的圆运动（图中以虚线表示）。圆上一点的加速度有一个指向圆心的分量 $\ell\dot{\theta}^2$，以及一个沿切线的分量 $\ell\ddot{\theta}$。开始时 $\dot{\theta} = 0$，因为系统是由静止释放的。所以 P 的初始加速度沿着切线方向，即垂直于 AP。

AP 与水平线成 $60°$ 角，所以 AP 的垂直线与水平线成 $30°$ 角。若加速度的大小为 a，则

$$a_1 = a\cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad a_2 = a\sin 30° = \tfrac{1}{2}a,$$

因此 $a_1 = \sqrt{3}\,a_2$，正如所求。

以 θ 表示：对 P 的位置求导，并令 $\dot{\theta} = 0$，可得初始加速度为 $\ell\ddot{\theta}(-\sin\theta, -\cos\theta)$。当 $\ddot{\theta} > 0$ 时，P 向下并朝 A 的方向运动。其大小为 $a = \ell\ddot{\theta}$。

B 的加速度

B 的 x 坐标永远恰好是 P 的两倍，因为 P 位于 AB 的垂直平分线（perpendicular bisector）上。求导两次可知，B 的加速度永远是 P 的水平加速度的两倍。所以 B 的初始加速度大小为 $2a_1$，方向指向 A，正如所求。

> ? **想一想** 为甚么可以说 B 朝 A 移动？摩擦力又朝哪个方向作用？

P 下落时，θ 增大，所以 $x_B = 2\ell\cos\theta$ 减小。因此 B 朝 A 滑动，而作用于 B 的摩擦力（friction）则背离 A（沿正 x 方向）。这里我们假设 B 确实会移动。题目给出摩擦力为 $\frac{\sqrt{3}}{6}R$，这正是滑动时的数值，从而确认了这一点。

初始加速度的大小

设 T_1 和 T_2 分别为 AP 和 PB 中的张力。设 R 为作用于 B 的法向反作用力（normal reaction），$F = \frac{\sqrt{3}}{6}R$ 为摩擦力。以 a 表示 P 的初始加速度的大小，故 $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，而 B 的

加速度为 $2a_1 = \sqrt{3}\,a$，方向指向 A。

珠子 B。绳 BP 以水平线以下 60° 的方向把 B 拉向 A 的一方。B 没有垂直方向的加速度，所以沿垂直方向分解可得

$$R = mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2.$$

沿水平方向分解，取指向 A 的方向为正：

$$m(\sqrt{3}\,a) = \tfrac{1}{2}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\left(mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2\right) = \tfrac{1}{4}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}mg,$$

所以

$$T_2 = 4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg. \tag{1}$$

质点 P。沿 P 的加速度方向分解，即向下并朝向 A、在水平线以下 30° 的方向。这个方向垂直于 AP，所以 T_1 没有任何贡献。重量 $3mg$ 与这个方向成 60° 角，所以它的贡献是 $3mg\cos 60^\circ = \tfrac{3}{2}mg$。张力 T_2 沿 PB 作用，即向上并背离 A、在水平线以上 60° 的方向。它与加速度方向成 150° 角，所以它的贡献是 $T_2\cos 150^\circ = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2$。因此

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2. \tag{2}$$

把 (1) 代入 (2)：

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg\right) = \tfrac{3}{2}mg - 6ma - mg,$$

$$9ma = \tfrac{1}{2}mg,$$

所以 P 的初始加速度的大小为

$$a = \frac{g}{18},$$

正如所求。

这个答案前后一致：由 (1) 得 $T_2 = \tfrac{8\sqrt{3}}{9}mg > 0$，所以绳 PB 是拉紧的。于是 $R = \tfrac{7}{3}mg > 0$。对 P 沿水平方向分解，得 $T_1 = T_2 + 6ma_1 = \tfrac{19\sqrt{3}}{18}mg > 0$，所以 AP 也是拉紧的。

验算

- P 的垂直方向方程，我们之前没有用到：$\tfrac{\sqrt{3}}{2}(T_1 + T_2) - 3mg = \tfrac{35}{12}mg - 3mg = -\tfrac{1}{12}mg$。这等于 $-3ma_2 = -3m\cdot\tfrac{g}{36}$，与预期相符。
- 数值上，我们对 B 和 P 的位置求导，得到 $a_1/a_2 \approx 1.7320508$ 及 $a_B/a_1 = 2$。然后取 $g = 9.81$，从三条力的方程解出 T_1、T_2 和 $\ddot{\theta}$。结果是 $|a| = 0.545 = g/18$，并有 $T_2/mg \approx 1.5396$ 及 $R/mg \approx 2.3333$。
- 若没有摩擦力，(1) 会变成 $T_2 = 2\sqrt{3}\,ma$，而 (2) 会给出 $6ma = \tfrac{3}{2}mg$，所以 $a = g/4$。摩擦力理应令运动减慢，而的确 $g/18 < g/4$。

常见错误

- 加入了向心项。在释放的一刻 $\dot{\theta} = 0$，所以加速度纯粹沿切线方向。
- 忘记了 T_2 会把 B 向下拉，令 R 增大，摩擦力亦随之增大。取 $R = mg$ 会得出错误答案。
- 对 P 沿水平和垂直方向分解。这样做是可行的，但会引入 T_1，并需要多一条方程。沿垂直于 AP 的方向分解便可把它消去。

STEP 之外

这是一个只有一个自由度（degree of freedom）的约束系统（constrained system）：一切都由单一个角 θ 决定。把位置以 θ 表示然后求导，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的第一步。在拉格朗日力学中，像 T_1 这类约束力（constraint force）是以有系统的方法消去的，而不是靠巧妙地选择方向。摩擦力并不能妥贴地纳入这个框架，这也是这类题目适合用来练习牛顿力学方法的原因之一。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对约束运动和非匀速圆周运动（non-uniform circular motion）有细致的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。