详细解答

STEP II 2003，第 1 题

纯数学 · 联立线性方程

> **STEP II 2003，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q1

关键思路

未知数 x 只以 ax 的形式出现，而 y 在每条方程中的系数都是 -1。因此，把相邻的方程相减，就可以完全消去 y，而且所得的两个差式左边相同。这样一来，方程组只在 b 取某一个值时才相容（consistent）；一旦相容，就有一个自由参数（free parameter）。题目余下的部分，就是看怎样好好选取这个参数。

解答

把三条方程编号为 (1)、(2)、(3)。从 (2) 减去 (1)，再从 (3) 减去 (2)，得

$$ax - 2z = 4, \tag{A}$$

$$ax - 2z = b - 7. \tag{B}$$

方程组的任何解都同时满足 (A) 和 (B)，所以只有当 $4 = b - 7$，即 $b = 11$ 时，才可能有解。这一点对 a 的每一个值都成立。

第 (i) 部分

当 $a = 0$ 时，方程变成 $-y - z = 3$、$-y - 3z = 7$、$-y - 5z = b$，x 完全没有出现。

若方程组有解，则由上面的说明可知 $b = 11$。

反过来，假设 $b = 11$。此时方程 (A) 变成 $-2z = 4$，所以 $z = -2$，再由 (1) 得 $y = -3 - z = -1$。以 $y = -1$、$z = -2$ 验算全部三条方程：

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 6 = 7, \qquad 1 + 10 = 11 = b,$$

所以（不论 x 取甚么值）我们都得到一个解。因此，方程组有解若且唯若（if and only if）$b = 11$。

第 (ii) 部分

现在 $a \neq 0$ 而 $b = 11$。设 $z = \lambda$。由方程 (A) 得 $ax = 4 + 2\lambda$，而由于 $a \neq 0$，我们可以两边相除：

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}.$$

然后由 (1) 得 $y = ax - z - 3 = 4 + 2\lambda - \lambda - 3 = 1 + \lambda$。

我们只用了 (1) 和 (2) 来求出这些值，所以还必须验证它们也满足 (3)：

$$3ax - y - 5z = 3(4 + 2\lambda) - (1 + \lambda) - 5\lambda = 12 + 6\lambda - 1 - 6\lambda = 11 = b.$$

所以对每一个数 λ，

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}, \qquad y = 1 + \lambda, \qquad z = \lambda$$

都是一个满足 $z = \lambda$ 的解，正如题目所求。（事实上，这些就是全部的解：任何解的 z 都有某个值 λ，而上面的推导随即确定了 x 和 y。）

> ? **想一想** 为甚么我们要另外验证方程 (3)?

我们用了 (1) 和 (2)（以 (1) 和 (A) 的形式）来求 x 和 y。三条含三个未知数的方程不一定会自动互相吻合，而 (3) 正是 b 出场的地方。$b = 11$ 就是在这一步验证中用上的。

第 (iii) 部分

当 $a = 2$ 时，由第 (ii) 部分可知所有解都是 $(x, y, z) = (2 + \lambda,\ 1 + \lambda,\ \lambda)$。于是

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (2 + \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 \\ &= 3\lambda^2 + 6\lambda + 5 \\ &= 3(\lambda + 1)^2 + 2, \end{aligned}$$

它恰好在 $\lambda = -1$ 时取得最小值 2。所以所求的解是

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad z = -1.$$

从几何角度看，所有解构成一条方向为 $(1, 1, 1)$ 的直线，而我们要找的是直线上最接近原点的一点。事实上 $(1, 0, -1) \cdot (1, 1, 1) = 0$，所以位置向量（position vector）与直线垂直（perpendicular），正如所料。

第 (iv) 部分

根据开首的说明，b 必须是 11。若 $a=0$，由第 (i) 部分必有 $y=-1$、$z=-2$，于是 $y^2+z^2=5$，太大了。所以 $a\neq 0$，而由第 (ii) 部分，解为 $x=(4+2\lambda)/a$、$y=1+\lambda$、$z=\lambda$。

> **想一想** x 怎样才可以非常大，而 y 和 z 却保持很小?

a 唯一出现的地方是 $x=(4+2\lambda)/a$。选定 λ 就确定了 y 和 z，然后只要 a 足够小，x 就可以要多大有多大。

我们需要 $y^2+z^2=(1+\lambda)^2+\lambda^2=2\lambda^2+2\lambda+1<1$, 即 $2\lambda(\lambda+1)<0$, 即 $-1<\lambda<0$。取 $\lambda=-\frac{1}{2}$：此时 $y=\frac{1}{2}$、$z=-\frac{1}{2}$ 而 $y^2+z^2=\frac{1}{2}<1$，同时 $x=3/a$。选取

$$a=10^{-6}$$

便得 $x=3\times 10^6>10^6$。所以 $a=10^{-6}$（连同 $b=11$）符合要求。

更一般地说，当 $-1<\lambda<0$ 时，我们有 $2<4+2\lambda<4$，所以恰好在 $0<a<4\times 10^{-6}$ 时才存在合适的解。负的 a 不可行，因为那时 $x<0$。

验算

- 把 $a=2$、$(x,y,z)=(1,0,-1)$ 代入原来的方程：$2-0+1=3$、$4-0+3=7$、$6-0+5=11$。
- 对于第 (iv) 部分，取 $a=10^{-6}$ 和 $(x,y,z)=(3\times 10^6,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$：$3-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$、$6-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=7$、$9-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=11$。
- 我们用精确分数验证过，对数百组随机选取的 a 和 λ，第 (ii) 部分的公式都满足全部三条方程；另外，对 λ 作网格搜索，也确认了第 (iii) 部分的最小值 2 在 $\lambda=-1$ 时取得。

常见错误

- 由其中两条方程求出 x 和 y 后，忘记验证第三条。
- 在第 (iv) 部分，以为 y 和 z “不可能同时很小”，就断定题目所求不可能做到。其实是可以的：$y-z=1$ 只能推出 $y^2+z^2\geq\frac{1}{2}$。

STEP 之外

这是对线性代数（linear algebra）中秩（rank）与相容性的初步认识。这里的系数矩阵（coefficient matrix）是奇异（singular）的（它的各行满足 $r_1 - 2r_2 + r_3 = 0$），所以方程组要么无解，要么有一整条直线的解，视乎右边的常数项是否满足同一个关系。第 (iv) 部分也说明了为甚么接近奇异的方程组在数值计算中很危险：一个极小的系数 a 会产生一个极大的解。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）涵盖了以上所有内容，包括像第 (iii) 部分那样的最小范数解（least-norm solution）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。