详细解答

STEP I 2003，第 9 题

力学 • 通过定点的抛体

STEP I 2003，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

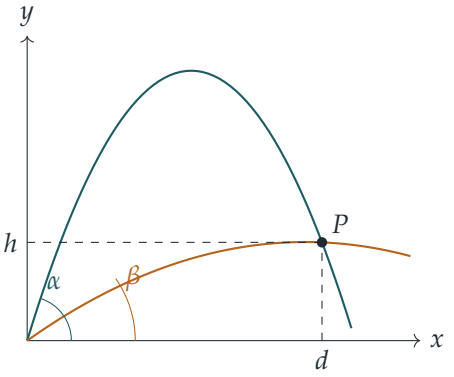
step.maths.org/questions/03-s1-q9

关键思路

写出水平位移和垂直位移，消去时间，再把 $\sec^2\theta$ 换成 $1+\tan^2\theta$：轨迹方程（trajectory equation）就变成 $T = \tan\theta$ 的二次方程。此后一切都围绕这个二次方程。有两个角度，即有两个相异实根，所以要看判别式（discriminant）。而 $\alpha+\beta$ 则通过 $\tan(\alpha+\beta)$ 的公式，由两根之和与两根之积决定。

解答

我们把质点（particle）视为只受重力作用而自由运动（不计空气阻力），以抛射点为原点，x 轴水平指向 P，y 轴铅垂向上。于是 P 是点 (d,h)，其中 $d>0$。我们取 $h>0$，即 P 在抛射点之上；$h\le 0$ 的情况留待最后再谈。



T 的二次方程

水平速度恒为 $V\cos\theta$，而垂直方向的运动有恒定加速度 $-g$，所以在时间 t

$$x = Vt\cos\theta, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

质点在时间 $t = d/(V\cos\theta)$ 到达 $x = d$（这里 $\cos\theta > 0$，因为质点朝 P 运动）。把它代入 y，并令 $y = h$，

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^2}{2V^2\cos^2\theta} = dT - \frac{gd^2}{2V^2}(1+T^2),$$

其中用了 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$。现在全式乘以 $\dfrac{2V^2}{gd^2} = \dfrac{2k}{d}$：

$$\frac{2kh}{d} = 2kT - (1+T^2), \qquad \text{即} \qquad T^2 - 2kT + \frac{2kh}{d} + 1 = 0,$$

这正是所求。

两个相异的角度

对于给定的 V（因而给定的 k），可行的抛射角（angle of projection）就是那些 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，其正切是这个二次方程的根。由于 tan 在该区间上严格递增（strictly increasing），相异的实根 T 对应相异的角度。所以我们需要这个二次方程有两个相异实根，而这恰好在判别式为正时成立：

$$4k^2 - 4\left(\frac{2kh}{d} + 1\right) > 0 \iff k^2d^2 - 2h(kd) - d^2 > 0 \iff (kd-h)^2 > h^2 + d^2,$$

这里先乘以 $d^2 > 0$，再对 kd 配方（completing the square）。

> **想一想** 把不等式两边平方有时会出错，那么为甚么由题目给出的条件可以推出 $(kd-h)^2 > h^2 + d^2$？

若 $kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$，则 $kd - h > \sqrt{h^2+d^2} > 0$。两边皆为正数，所以平方后不等式仍然成立：$(kd-h)^2 > h^2 + d^2$。因此判别式为正，$T$ 有两个相异的根，从而有两个相异的抛射角。

（逆命题（converse）同样成立。要令 $(kd-h)^2 > h^2+d^2$，另一个可能是 $kd < h - \sqrt{h^2+d^2}$，但由于 $\sqrt{h^2+d^2} > |h|$，右边是负数，而 $kd = V^2/g > 0$。所以当且仅当 $kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$ 时，才可以有两个角度。）

两个角度都确实在水平线之上。两根之和为 $2k > 0$，两根之积为 $1 + 2kh/d > 0$（因为 $h > 0$），所以两根皆为正数。

两角之和

设 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 为两根。由二次方程可得

$$\tan\alpha+\tan\beta=2k,\qquad \tan\alpha\tan\beta=1+\frac{2kh}{d}.$$

两根之积不等于 1（因为 $kh/d\neq 0$），所以 $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，复角公式（compound-angle formula）适用：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2k}{-2kh/d}=-\frac{d}{h}.$$

留意 k 已经约去：两角之和与速率无关。

> **想一想** $\tan(\alpha+\beta)=-d/h$ 有无限多个解。哪一个才是 $\alpha+\beta$?

我们已证明 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$。此外 $\tan(\alpha+\beta)<0$，所以 $\alpha+\beta$ 位于 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 之内。在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内正切为 $-d/h$ 的角只有一个，就是 $\pi-\arctan(d/h)$，因为 $\arctan(d/h)\in(0,\frac{\pi}{2})$，而且 $\tan(\pi-u)=-\tan u$。因此

$$\alpha+\beta=\pi-\arctan\left(\frac{d}{h}\right),$$

这正是所求。

这个结果有一个漂亮的看法。$\arctan(d/h)$ 是 OP 与向上铅垂线之间的夹角，所以 $\pi-\arctan(d/h)=\frac{\pi}{2}+\gamma$，其中 γ 是 P 的仰角（angle of elevation）。于是 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}$：两个抛射方向关于 OP 与铅垂线夹角的角平分线对称。

验算

- 若 $h=0$（目标在同一水平），公式给出 $\alpha+\beta=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$：这就是大家熟悉的、射程（range）相同的一对余角。
- 取 $d=3$、$h=4$、$k=4$。则 $kd=12>4+5$，两根为 $T=4\pm\sqrt{13/3}$，得出 $\alpha\approx 1.4078$ 和 $\beta\approx 1.0903$。所以 $\alpha+\beta\approx 2.4981$，等于 $\pi-\arctan(0.75)\approx 2.4981$。
- 对数千组随机的 d、h 和 k，分别以两个角度对飞行过程作数值模拟，轨迹都通过 (d,h)，并印证了该条件和两角之和。

常见错误

- 忘记 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$，以致始终得不到 T 的二次方程。
- 写成 $\alpha+\beta=\arctan(-d/h)=-\arctan(d/h)$，这是负数。反正切（inverse tangent）只会给出 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内的角，所以必须利用 $\alpha+\beta$ 的范围来选取正确的分支（branch）。

- 不加小心地取 $h < 0$（目标在抛射点之下）。这时其中一根可能是负数，而正确的一般结论是 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \arctan(h/d)$。只有当 $h > 0$ 时，它才与题目中的形式一致。

STEP 之外

在临界情况 $kd = h + \sqrt{h^2 + d^2}$，两个角度合而为一，这个情况描绘出以速率 V 抛射的所有轨迹的包络线（envelope）：“安全抛物线”（parabola of safety）$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V^2}$。在它之内的点有两种方法可以击中，在它之上的点只有一种方法，在它之外的点则完全无法击中。曲线族的包络线，可以把一条方程与它对参数的导数联立求解而得出，在微分方程（differential equations）和光学中还会再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是以这种严谨的态度讲解抛体运动和约束运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。