详细解答

STEP I 2003，第 8 题

纯数学 · 逻辑斯谛微分方程

> **STEP I 2003，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q8

关键思路

把“A 转化为 B 的速率”翻译成导数（derivative）：它就是 B 的体积增长的速率。由于 $x = 1 - y$，这样便得到一条只含 y 的可分离变量（separable variables）微分方程（differential equation），再用部分分式（partial fractions）完成积分。最后一部分问的是 $x = 1 - y$ 的公式会否到达零，而答案取决于一个事实：指数函数（exponential）的值永远不会是无限大。

解答

建立方程

B 的体积是 yV，而 V 是固定的。A 以速率 $kVxy$ 转化为 B，所以 B 的体积以该速率增加：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(yV) = kVxy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kxy = ky(1-y),$$

这里除以 V 并用了 $x = 1 - y$。（等价地，A 的体积以这个速率减少：$V\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -kVxy$，由于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$，这说的是同一件事。）

解方程

开始时 $x > 0$ 且 $y > 0$，所以 $0 < y < 1$。只要 $0 < y < 1$，我们便可以除以 $y(1-y)$，把变量分离：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int k\,\mathrm{d}t.$$

用部分分式，$\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$，所以

$$\ln y - \ln(1-y) = kt + c,$$
$$\ln \frac{y}{1-y} = kt + c,$$

这里用到 y 和 $1-y$ 都是正数，所以不需要加绝对值符号。两边取指数，并记 $D = \mathrm{e}^c$，

$$\frac{y}{1-y} = D\mathrm{e}^{kt}.$$

于是 $y = D\mathrm{e}^{kt} - yD\mathrm{e}^{kt}$，所以 $y\left(1 + D\mathrm{e}^{kt}\right) = D\mathrm{e}^{kt}$，而

$$y = \frac{D\mathrm{e}^{kt}}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

正是所求。代入 $t = 0$ 可得 $D = \dfrac{y_0}{1-y_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$，其中 x_0 和 y_0 是初始值；特别地，$D > 0$。

想一想 我们在积分时假设了 $0 < y < 1$。怎样知道这个条件在任何时刻都一直成立?

假设不然，并设 T 为 y 首次到达 0 或 1 的时刻。在 $0 \le t < T$ 上，以上的推导是成立的，所以 y 在该处由公式给出。由于 y 是连续（continuous）的，$y(T)$ 就是公式在 $t \to T$ 时的极限（limit），即 $D\mathrm{e}^{kT}/(1 + D\mathrm{e}^{kT})$。因为 $D > 0$，这个值严格介乎 0 与 1 之间，于是出现矛盾。所以对所有 t 都有 $0 < y < 1$，而公式对所有 t 都成立。

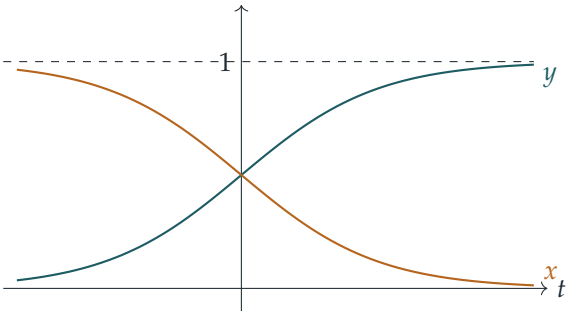
A 会否完全转化?

不会。由公式，

$$x = 1 - y = \frac{1}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

而对每一个 t，$D\mathrm{e}^{kt}$ 都是有限的，所以在任何时刻都有 $x > 0$：A 总会剩下一些。不过，当 $t \to \infty$ 时，$D\mathrm{e}^{kt} \to \infty$（因为 $k > 0$ 且 $D > 0$），所以 $x \to 0$ 而 $y \to 1$。转化过程愈来愈接近完成，但永远不会在有限时间内结束。

这在物理上也说得通：反应速率 $kVxy$ 与剩余的 A 的份量成正比，所以 A 快用完时，反应便会慢下来。



草图（取 $D = k = 1$）显示 y 的 S 形逻辑斯谛曲线（logistic curve）趋近 1，以及 x 的曲线趋近 0，两者都永远不会到达各自的极限。

验算

- 对答案求导：设 $u = De^{kt}$，则 $y = u/(1+u)$，而 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ku/(1+u)^2 = ky(1-y)$，与预期相符。
- 取 $D = k = 1$（即开始时两者体积相等），公式给出在 $t = \ln 3$ 时 $y = \frac{3}{4}$。我们亦随机选取了 200 组 k 和初始值，用数值方法把方程逐步向前推算，结果与公式相差不超过 10^{-12}，而 x 自始至终都保持正值。

常见错误

- 把“在极限中 $y = 1$”当成“在某个时刻 $y = 1$”。$t \to \infty$ 时的极限，在任何有限的时刻都不会达到。
- 忘记 $\ln(y/(1-y))$ 这一步需要 $0 < y < 1$，或者没有说明这个条件为何一直成立。

STEP 之外

方程 $\dot{y} = ky(1-y)$ 就是逻辑斯谛方程（logistic equation），是描述受资源限制的增长的标准模型。这里 $y = 0$ 和 $y = 1$ 是平衡解（equilibrium solutions），而微分方程的唯一性定理（uniqueness theorem）指出，其他解永远不能穿越或触及它们，这是解决最后一部分的一个更简洁的方法。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）详细讨论了逻辑斯谛方程和这类稳定性分析（stability analysis）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。