详细解答

STEP I 2003，第 7 题

纯数学 · 数字与整除性

> **STEP I 2003，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q7

关键思路

设 $N = 100a + 10b + c$，并令 $S = N$，便得到一条关于三个数字的方程。把它整理成

$$99a + (10b - b^2) = c^3 - c,$$

题目第一段的两个事实就可以直接派上用场：含 b 的一项被困在 0 与 25 之间，而 $99a$ 和 $c^3 - c$ 都是 3 的倍数。第一个事实表示 $c^3 - c$ 必定刚好略高于 99 的某个倍数；第二个事实则减少了 b 的可能取值。之后只剩下寥寥几种情况，用手逐一检查即可。

解答

两个预备事实

配方（completing the square）得

$$10k - k^2 = 25 - (5 - k)^2.$$

由于 $(5 - k)^2 \geq 0$，可得 $10k - k^2 \leq 25$。由于 $0 \leq k \leq 9$，我们有 $-4 \leq 5 - k \leq 5$，所以 $(5 - k)^2 \leq 25$，因此 $10k - k^2 \geq 0$。（当 $k = 0$ 时取等号得 0，当 $k = 5$ 时取等号得 25。）

其次，$k - 1$、k、$k + 1$ 是三个连续整数（consecutive integers），所以当中恰有一个是 3 的倍数。因此它们的积 $k(k - 1)(k + 1)$ 可被 3 整除。（这对所有整数 k 都成立，不限于 $0 \leq k \leq 9$。）

找出这些数

设 $N = 100a + 10b + c$，其中各数字满足 $1 \le a \le 9$（因为 $N \ge 100$）及 $0 \le b, c \le 9$。则 $S = a + b^2 + c^3$，而

$$\begin{aligned} S = N &\iff a + b^2 + c^3 = 100a + 10b + c \\ &\iff 99a + (10b - b^2) = c^3 - c = (c-1)c(c+1). \end{aligned} \tag{$*$}$$

想一想 为甚么要把 $10b - b^2$ 与 $99a$ 放在同一边?

因为这正是我们刚刚学会控制的组合。设 $t = 10b - b^2$，第一个事实指出 $0 \le t \le 25$，而 $99a$ 是 99 的倍数，远大于 25。所以 $(*)$ 表示 $c^3 - c$ 等于 99 的某个倍数加上一个细小的“余数” t，这样很快就能把情况锁定。

限制 b。由第二个事实，3 整除 $c^3 - c = (c-1)c(c+1)$，而 3 亦整除 $99a$。所以由 $(*)$，3 整除 $t = b(10 - b)$。由于 $10 - b \equiv 1 - b \pmod 3$，这需要 $b \equiv 0$ 或 $b \equiv 1 \pmod 3$。可能的情况如下：

b	0	1	3	4	6	7	9
$t = 10b - b^2$	0	9	21	24	24	21	9

所以 $t \in \{0, 9, 21, 24\}$。（$b = 2, 5, 8$ 时 $t = 16, 25, 16$，全都不能被 3 整除。）

限制 c。由于 $a \ge 1$ 及 $t \ge 0$，$(*)$ 给出 $c^3 - c \ge 99$。$c^3 - c$ 的值如下：

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c^3 - c$	0	0	6	24	60	120	210	336	504	720

所以 $c \ge 5$。

各种情况。对每个 $c \ge 5$，我们需要一个倍数 $99a$（其中 $1 \le a \le 9$）落在范围 $[c^3 - c - 25,\ c^3 - c]$ 之内，然后 $t = c^3 - c - 99a$ 必须是 $0, 9, 21, 24$ 其中之一。

- $c = 5$：$c^3 - c = 120$。在 $[95, 120]$ 内 99 的倍数只有 99，得 $a = 1$ 及 $t = 21$，所以 $b = 3$ 或 $b = 7$。由此得 $N = 135$ 和 $N = 175$。
- $c = 6$：$c^3 - c = 210$。在 $[185, 210]$ 内 99 的倍数只有 198，得 $a = 2$ 及 $t = 12$。但 12 并非 $0, 9, 21, 24$ 其中之一（事实上 $10b - b^2 = 12$ 没有整数根）。无解。
- $c = 7$：$c^3 - c = 336$。附近的倍数是 297 和 396，两者都不在 $[311, 336]$ 内。无解。
- $c = 8$：$c^3 - c = 504$。在 $[479, 504]$ 内 99 的倍数只有 495，得 $a = 5$ 及 $t = 9$，所以 $b = 1$ 或 $b = 9$。由此得 $N = 518$ 和 $N = 598$。
- $c = 9$：$c^3 - c = 720$。附近的倍数是 693 和 792，两者都不在 $[695, 720]$ 内。无解。

以上每一步都可以逆推，所以这四个数确实满足 $S = N$；直接验证：

$$135 : 1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135, \quad 175 : 1 + 7^2 + 5^3 = 1 + 49 + 125 = 175,$$
$$518 : 5 + 1^2 + 8^3 = 5 + 1 + 512 = 518, \quad 598 : 5 + 9^2 + 8^3 = 5 + 81 + 512 = 598.$$

所以满足 $S = N$ 的数恰好是

$$N = 135, \quad 175, \quad 518, \quad 598.$$

验算

对全部 900 个三位数作穷举搜索（brute-force search），逐一计算 $a + b^2 + c^3$，找到的恰好是 135、175、518 和 598，与分情况讨论的结果一致。还有一个巧妙的结构性检验：每一对解之中，b 的两个值相加都等于 10（$3 + 7$ 和 $1 + 9$）。这是必然的，因为把 b 换成 $10 - b$ 时，$t = 10b - b^2$ 保持不变。

常见错误

- 忘记 $a \geq 1$，因而接受了 000 或 001 这类并非三位数的“解”。
- 对给定的 a 和 c 找到一个 b 之后便停下来：由于 $t(b) = t(10 - b)$，解是成对出现的。
- 只用被 3 整除这一性质，而没有用上界限 $0 \leq t \leq 25$：正是这个界限令每个 c 最多只有一个可能的 a。

STEP 之外

等于自身各数字的幂之和的数，是趣味数学中的经典题材（其中最著名的一类是阿姆斯特朗数（Armstrong numbers），又称“自恋数”（narcissistic numbers），例如 $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$）。背后真正重要的想法，正是这里所用的方法：先估计两边的大小，使搜索范围变成有限，再利用同余（congruence）来删减。这种把大小估计与模算术（modular arithmetic）结合起来的手法，是解决许多丢番图方程（Diophantine equations）的关键。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门著作）对同余及其应用有极佳的介绍。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。