详细解答

STEP I 2003，第 6 题

纯数学 · 以部分分式积分

> **STEP I 2003，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q6

关键思路

两个二次式都可以因式分解，所以最自然的工具就是部分分式（partial fractions）。所谓“不同情况”，出现在两个一次因式重合的那一刻：这时部分分式失效，我们改为对一个完全平方（perfect square）积分。动手做第 (ii) 部分之前，先仔细看清楚那两个二次式：只要把变量简单平移一下，其中一个就变成另一个。

解答

第 (i) 部分

由于 $2 \times a = 2a$ 及 $2 + a = a + 2$，这个二次式可以因式分解：

$$x^2 + (a+2)x + 2a = (x+2)(x+a).$$

因为 $a > 0$，当 $0 \le x \le 1$ 时两个因式都是正数，所以被积函数（integrand）在整个区间上连续（continuous），而对每一个 $a > 0$，积分都存在。两个因式相等，当且仅当 $a = 2$，这就是分界线。

情况 $a \neq 2$。两个因式相异，且

$$\frac{1}{(x+2)(x+a)} = \frac{1}{a-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+a}\right),$$

这可以通分来验证：分子变成 $(x+a) - (x+2) = a - 2$。由于 $x+2$ 和 $x+a$ 在 $[0,1]$ 上

都是正数，对数（logarithm）里不需要加绝对值符号：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+a)} &= \frac{1}{a-2}\Big[\ln(x+2)-\ln(x+a)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{a-2}\Big(\ln 3-\ln(1+a)-\ln 2+\ln a\Big)\\ &= \frac{1}{a-2}\ln\left(\frac{3a}{2(a+1)}\right).\end{aligned}$$

想一想 当 $0<a<2$ 时，因子 $\frac{1}{a-2}$ 是负数。被积函数是正的，答案必须是正数；它仍然是正数吗？

是的。我们有 $\dfrac{3a}{2(a+1)}<1 \iff 3a<2a+2 \iff a<2$，所以当 $0<a<2$ 时，对数也是负数，两者相除便得正数。同理，当 $a>2$ 时两者皆为正数。如果你希望每一部分都是正数，可以把 $0<a<2$ 时的答案写成 $\dfrac{1}{2-a}\ln\left(\dfrac{2(a+1)}{3a}\right)$；这是同一个数。

情况 $a=2$。这时被积函数是 $(x+2)^{-2}$，而

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

第 (ii) 部分

这里的二次式是 $u^2+au+a-1=(u+1)(u+a-1)$，但在重复上面的工夫之前，先作代换（substitution）$u=x+1$：

$$(x+1)^2+a(x+1)+a-1=x^2+(a+2)x+2a.$$

这正正就是第 (i) 部分的二次式。此外 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，而 $u=1,2$ 对应 $x=0,1$。所以

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(a+2)x+2a},$$

答案亦与第 (i) 部分相同：

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a-2}\ln\left(\dfrac{3a}{2(a+1)}\right), & a\neq 2,\\[2ex] \dfrac{1}{6}, & a=2.\end{cases}$$

直接计算：在 $[1,2]$ 上有 $u+1>0$ 及 $u+a-1\geq a>0$，所以被积函数同样连续，而两个因式重合，当且仅当 $a-1=1$，即 $a=2$。部分分式给出 $\frac{1}{a-2}[\ln\frac{u+1}{u+a-1}]_1^2=\frac{1}{a-2}(\ln\frac{3}{a+1}-\ln\frac{2}{a})$，这是同一个表达式。

验算

- **在 $a = 2$ 处的连续性**。当 $a \to 2$ 时，对数趋向 $\ln 1 = 0$，所以公式呈 $0/0$ 的形式。它的极限（limit）就是 $\ln 3a - \ln(2a + 2)$ 在 $a = 2$ 处的导数（derivative），即 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，与特殊情况的结果吻合。两种情况顺畅地衔接起来，本应如此。
- **一个特殊值**。取 $a = 1$，第 (i) 部分的被积函数是 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$，而公式给出 $-\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3} \approx 0.2877$。
- **数值验证**。对两个积分使用辛普森法则（Simpson's rule），取 $a = 1$、$a = 2$、a 接近 0 和 2 的值，以及 200 个不超过 20 的随机 a 值，结果与公式相符，误差小于 10^{-10}。

常见错误

- 忘记了 $a = 2$ 的情况，这时部分分式的系数 $\frac{1}{a-2}$ 没有定义。
- 把部分分式的正负号弄反了。通分检查一下。
- 把 $0 < a < 2$ 和 $a > 2$ 当成真正不同的答案。只要留意正负号，一条公式已涵盖两者。

STEP 之外

在 $a = 2$ 处的表现，是可去奇点（removable singularity）的一个小例子：公式在某一点看似没有定义，但它在该点的极限恰好就是积分的值。在分析学（analysis）中，你会学到一个依赖参数的积分在甚么条件下对该参数连续（或可微），这就解释了为何两种情况必须吻合。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）对极限、连续性和黎曼积分（Riemann integral）有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。