详细解答

# STEP I 2003，第 5 题

纯数学 · 二项式级数

**STEP I 2003，第 5 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s1-q5

## 关键思路

在任何二项展开式（binomial expansion）中，先写出通项（general term），再追踪它所带的 $x$ 的幂次；常数项（constant term）就是该幂次为零的那一项。第 (ii) 部分的展开式并非有限项，所以要先抽出主导因子：当 $|x|$ 很大时，主导因子是 $x^6$，剩下一个以 $3/x$ 为变量的级数（series）；当 $|x|$ 很小时，主导因子是 $3x^5$，剩下一个以 $x/3$ 为变量的级数。之后只要看清楚 $x$ 的哪些幂次可能出现，问题便迎刃而解。

## 解答

### 第 (i) 部分

$(2x + x^{-2})^6$ 的通项是

$$\binom{6}{r}(2x)^{6-r}(x^{-2})^r = \binom{6}{r}2^{6-r}x^{6-3r}, \qquad r = 0, 1, \ldots, 6.$$

这一项与 $x$ 无关，当且仅当 $6 - 3r = 0$，即 $r = 2$，此时该项为

$$\binom{6}{2}2^4 = 15 \times 16 = 240,$$

正如题目所求。

同样地，$(ax^3 + bx^{-2})^{5n}$ 的通项是

$$\binom{5n}{r}(ax^3)^{5n-r}(bx^{-2})^r = \binom{5n}{r}a^{5n-r}b^r\,x^{15n-5r}.$$

当 $15n = 5r$ 时，$x$ 的幂次为零，所以 $r = 3n$（它符合 $0 \le r \le 5n$）。因此与 $x$ 无关的项是

$$\binom{5n}{3n}a^{2n}b^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!\,(3n)!}\,a^{2n}b^{3n}.$$

**第 (ii) 部分**

$|x|$ **很大时**。抽出因子 $x^6$，得

$$f(x) = (x^6(1+3/x))^{1/2} = x^3\Big(1+\frac{3}{x}\Big)^{1/2},$$

这里按题目的原意取 $(x^6)^{1/2} = x^3$（严格来说应是 $|x|^3$；见下文的说明）。当 $|x| > 3$ 时，$|3/x| < 1$, 所以取 $u = 3/x$ 时, $(1+u)^{1/2}$ 的二项级数 (binomial series) 收敛 (converge)：

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 + \cdots,$$

其中 $u^3$ 的系数是

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{3/8}{6} = \frac{1}{16}.$$

把级数乘以 $x^3$，项 $\binom{1/2}{k}3^k x^{-k}$ 便变成 $\binom{1/2}{k}3^k x^{3-k}$，所以只有 $k=3$ 会给出常数：

$$f(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x + \frac{1}{16}\cdot 27 - \frac{405}{128x} + \cdots,$$

而与 $x$ 无关的项是 $\frac{27}{16}$，正如题目所求。

**想一想** 当 $x < -3$ 时会怎样?

平方根指的是非负的那个根，而 $(x^6)^{1/2} = |x|^3$，当 $x<0$ 时它等于 $-x^3$。所以当 $x<-3$ 时，展开式的每一项都会变号，常数项是 $-\frac{27}{16}$。题目所述的结果 $\frac{27}{16}$ 在 $x>3$ 时完全正确；在 $x<-3$ 时，若把 $(x^6)^{1/2}$ 理解为 $x^3$，这个结果才成立，而这显然就是题目的原意。

$|x|$ **很小时**。这时括号内的主导项是 $3x^5$，所以我们改为抽出它：

$$x^6 + 3x^5 = 3x^5\Big(1+\frac{x}{3}\Big).$$

要 $f(x)$ 是实数，必须有 $x^5(x+3)\geq 0$；由于 $|x|<3$，因子 $x+3$ 是正数，所以必须有 $x\geq 0$。（当 $-3<x<0$ 时，$f$ 根本不能定义为实函数。）当 $0<x<3$ 时，

$$f(x) = \sqrt{3}\,x^{5/2}\Big(1+\frac{x}{3}\Big)^{1/2} = \sqrt{3}\,x^{5/2}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}\frac{x^k}{3^k},$$

而由于 $|x/3|<1$，这个级数收敛。每一项都是

$$x^{5/2+k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

的常数倍，而 $\frac{5}{2}+k$ 永远不是整数，当然也就永远不是 0。因此，当 $|x|<3$ 时，$f(x)$ 按 $x$ 的幂展开的式子中没有与 $x$ 无关的项。（在 $x=0$ 这一点，$f(0)=0$。）

## 验算

- 当 $x$ 是很大的正数时，$f(x) - \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x\right)$ 应趋近 $\frac{27}{16} = 1.6875$。取 $x = 1000$，计算机给出 1.68434，而级数的下一项 $-\frac{405}{128x} \approx -0.00316$ 正好解释了这个差距。
- 在 0 附近，$f(x) \approx \sqrt{3}\,x^{5/2}$：取 $x = 0.01$，$f(0.01) = \sqrt{10^{-12} + 3 \times 10^{-10}} \approx 1.734 \times 10^{-5}$，与 $\sqrt{3} \times 10^{-5}$ 相当接近，而且肯定不是趋向一个非零常数。
- 对于一般公式，取 $n = 1$、$a = b = 1$，得 $\binom{5}{3} = 10$，即 $(x^3 + x^{-2})^5$ 的常数项；直接展开便可确认。

## 常见错误

- 写通项时把幂次的次序调转了，例如写成 $(2x)^r(x^{-2})^{6-r}$，然后又把 $r$ 与二项式系数（binomial coefficient）配错。两种标记方式都可以，只要前后一致便行。
- 弄错 $\binom{1/2}{3}$ 的正负号：两个负因子 $(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})$ 相乘，结果是正数。
- 在 $x$ 很小时，以抽出 $x^6$ 的方法展开 $(x^6 + 3x^5)^{1/2}$：这样会得到一个以 $3/x$ 为变量的级数，而它在 $|x| < 3$ 时发散（diverge）。

## STEP 之外

$f$ 的两个展开式在不同的区域内成立，而抽出哪一个因子，就决定了你得到的是哪一个区域。这正是把函数围绕不同的点展开的想法，它通往复分析（complex analysis）中的洛朗级数（Laurent series）和皮瑟级数（Puiseux series，即按分数幂展开的级数，就像这里的 $x^{5/2+k}$）。在 $x < -3$ 时引起正负号问题的平方根分支（branch），也是复分析的一个核心课题。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以图像方式解释了这两个概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。