详细解答

STEP I 2003，第 4 题

纯数学 · 三角不等式

> **STEP I 2003，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q4

关键思路

最容易想到的做法是把两边同乘 $\cos\theta$，但 $\cos\theta$ 在 $[0,2\pi)$ 上会变号，而乘以负数会令不等式（inequality）的方向逆转。因此我们分成 $\cos\theta>0$ 和 $\cos\theta<0$ 两种情况讨论。其中一种情况其实十分简单，因为 $1+\sin\theta$ 永不为负。另一种情况，只要把 $\sin\theta-\cos\theta$ 写成 $R\sin(\theta-\alpha)$ 的形式，便可化为单一个正弦不等式。

解答

设 $f(\theta)=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$。以下一律假设 $0\le\theta<2\pi$ 且 $\theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$。

情况 1：$\cos\theta<0$，即 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$

由于 $\sin\theta\ge-1$，分子 $1+\sin\theta$ 最少为 0，而分母为负数。所以 $f(\theta)\le0<1$。

$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内的每一个 θ 都满足该不等式。

情况 2：$\cos\theta>0$，即 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

乘以正数 $\cos\theta$ 不会改变不等式的方向，所以

$$f(\theta)\le1\iff1+\sin\theta\le\cos\theta\iff\sin\theta-\cos\theta\le-1.$$

现在 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，于是条件变成

$$\sin\left(\theta-\tfrac{\pi}{4}\right)\le-\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

想一想 我们需要考虑 $\phi = \theta - \frac{\pi}{4}$ 的哪些值?

我们只需考虑这个情况所容许的两个范围:

- 若 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$，则 $-\frac{\pi}{4} \le \phi < \frac{\pi}{4}$。在这个区间（interval）上，$\sin\phi$ 是递增的，且 $\sin\phi \ge \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，等号只在 $\phi = -\frac{\pi}{4}$ 时成立。所以这里唯一的解是 $\theta = 0$。（验算：$f(0) = 1/1 = 1$，等号成立。）
- 若 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$，则 $\frac{5\pi}{4} < \phi < \frac{7\pi}{4}$。在这个开区间（open interval）上 $\sin\phi < -\frac{1}{\sqrt{2}}$，因为 $\sin\phi$ 在两个端点都等于 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$，而在两者之间的 $\phi = \frac{3\pi}{2}$ 处降至 -1。所以 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 内的每一个 θ 都是解。

综合结果

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ 这个值要剔除，因为该处 $\cos\theta = 0$。综合各个情况，不等式成立，当且仅当

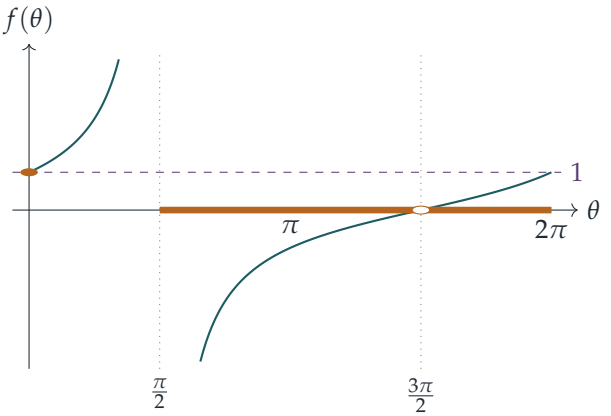
$$\theta = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \text{或} \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

更巧妙的看法

利用 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$、$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$ 和 $1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$，

$$f(\theta) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

这里约去了公因式，而由于 $\cos\theta \ne 0$，该公因式不等于零。（当 $\theta = \pi$ 时，中间的式子没有定义，但首尾两式在该处仍然相等。）当 θ 取遍 $[0, 2\pi)$ 时，$\psi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$ 取遍 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$。从 $\tan\psi$ 的图像一看便知，$\tan\psi \le 1$ 只在 $\psi = \frac{\pi}{4}$ 以及 $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{5\pi}{4}$ 时成立。只要剔除 $\psi = \pi$（即 $\theta = \frac{3\pi}{2}$），这就是同一个答案。



解集（琥珀色）就是曲线位于虚线 $f = 1$ 上或其下方的部分。留意 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 处的空心点：在该处 $f(\theta) \to 0$，但 f 没有定义。

验算

- $\theta = 0$：$f(0) = 1$，刚好在边界上。在略大于 0 之处，分子大于 1 而分母小于 1，所以 $f > 1$。这确认了 $\theta = 0$ 是一个孤立的解。
- $\theta = \frac{7\pi}{4}$：$f = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) / \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \leq 1$。正确。
- $\theta = \pi$：$f = 1/(-1) = -1 \leq 1$。正确。
- 我们在 $[0, 2\pi)$ 内随机抽取了 2×10^5 个 θ 作测试，结果与上述解集完全吻合。在 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 附近，我们得到 $f \approx 5 \times 10^{-5}$，与 $f \to 0$ 一致。

常见错误

- 没有分情况便把整条式乘以 $\cos\theta$。这样会在所有地方都得出 $1 + \sin\theta \leq \cos\theta$，错误地舍弃了整个区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$。
- 遗漏孤立的解 $\theta = 0$。题目容许 $\theta = 0$，而等号成立也算是解。
- 把 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 也包括在内。该处的式子是 $\frac{0}{0}$，所以没有定义，尽管它的极限（limit）是 0。

STEP 之外

这里的教训是：只有*递增*的运算才会保持不等式的方向，例如乘以正数、代入递增函数（increasing function）等等。时刻留意这一点，正是实分析（real analysis）的日常功夫。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ 处的可去奇点（removable singularity），即 f 有极限但没有函数值的地方，是实分析的另一个主题：连续性（continuity）所讲的，就是极限与函数值是否一致。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把这两个概念讲解得既严谨又易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。