详细解答

STEP I 2003，第 3 题

纯数学 · 半角三角方程

> **STEP I 2003，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q3

关键思路

每一部分都是把 $\frac{1}{2}\theta$ 的某个函数与 θ 的同一个函数作比较，所以可利用倍角公式（double-angle formula），把所有式子都以半角（half-angle）表示。这样，每条方程都会变成只含单一个量（$\sin\frac{1}{2}\theta$, $\tan\frac{1}{2}\theta$ 或 $\cos\frac{1}{2}\theta$）的多项式方程（polynomial equation），可以用因式分解（factorise）或当作二次方程（quadratic）来解。唯一要小心的，是留意半角函数实际上可以取哪些值，以及各函数在哪里有定义。

解答

第 (i) 部分

利用 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$，方程 $2\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$ 等价（equivalent）于

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = 0, \qquad \text{即} \qquad 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\left(1-\cos\tfrac{1}{2}\theta\right) = 0.$$

所以方程成立，当且仅当（if and only if）$\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ 或 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$。

但若 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$，则 $\sin^2\frac{1}{2}\theta = 1 - \cos^2\frac{1}{2}\theta = 0$，所以无论如何都有 $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$。因此第二种可能已包含在第一种之内，于是

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta \iff \sin\tfrac{1}{2}\theta = 0,$$

正如所求。（换句话说，方程的解恰好是 $\theta = 2n\pi$，其中 n 为整数。）

第 (ii) 部分

设 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$。要令方程有意义，$\tan\frac{1}{2}\theta$ 和 $\tan\theta$ 都必须有定义，所以 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq 0$。由于 $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，第二个条件即 $t^2 \neq 1$。在这些限制之下，$\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$，方程变成

$$2t = \frac{2t}{1-t^2}.$$

两边乘以不等于零的 $1-t^2$，得 $2t - 2t^3 = 2t$，所以 $t^3 = 0$，即 $t = 0$。

> ? **想一想** 两边乘以 $1-t^2$ 是否稳妥？我们有没有因此失去了解，或多出了解？

乘以一个非零的量是可逆的步骤，所以在两个正切都有定义的集合上，这条关于 t 的方程与 $t = 0$ 完全等价。反过来，$t = 0$ 给出 $\tan\theta = 0$ 和 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$，两边都等于 0。

而 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$ 恰好在 $\frac{1}{2}\theta = n\pi$ 时成立。所以方程的解是

$$\theta = 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

与第 (i) 部分的解集相同。

第 (iii) 部分

设 $c = \cos\frac{1}{2}\theta$。利用 $\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1 = 2c^2 - 1$，方程 $2\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\theta$ 等价于

$$2c = 2c^2 - 1 \iff 2c^2 - 2c - 1 = 0 \iff c = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

由于 c 是一个余弦值，所以 $-1 \le c \le 1$。根 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1.37$ 太大，而 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \approx -0.37$ 则在容许范围内。所以方程成立，当且仅当

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) = -\cos\phi,$$

其中 ϕ 的定义与题目所给的相同。这个 ϕ 存在而且唯一，因为 $0 < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) < 1$，而 cos 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上由 1 递减至 0。

> ? **想一想** 怎样把 $\cos\frac{1}{2}\theta = -\cos\phi$ 化成题目所给的形式？

写成 $-\cos\phi = \cos(\pi - \phi)$。方程 $\cos x = \cos\alpha$ 的通解（general solution）是 $x = 2m\pi \pm \alpha$，所以

$$\tfrac{1}{2}\theta = 2m\pi \pm (\pi - \phi) \qquad \text{即} \qquad \theta = 4m\pi \pm (2\pi - 2\phi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

把两个正负号分开处理。

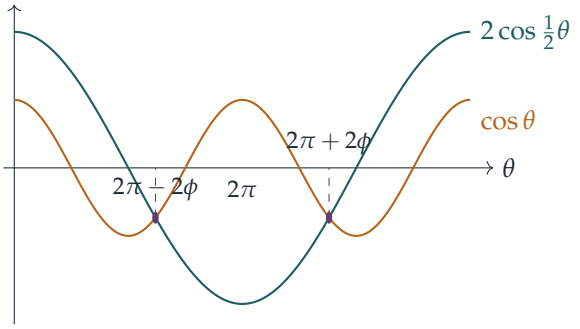
▶ 取 + 号：$\theta = 4m\pi + 2\pi - 2\phi = (4n+2)\pi - 2\phi$，其中 $n = m$。

- 取 $-$ 号：$\theta = 4m\pi - 2\pi + 2\phi = \big(4(m-1)+2\big)\pi + 2\phi = (4n+2)\pi + 2\phi$，其中 $n = m - 1$。

当 m 取遍所有整数时，两种情况下的 n 也取遍所有整数。因此

$$2\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\theta \iff \theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi，\text{对某个整数}n.$$

每一步都是等价关系，所以两个方向都已证明。我们也可以直接验证逆命题：若 $\theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi$，则 $\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\big((2n+1)\pi \pm \phi\big) = -\cos\phi = c$，而它满足 $2c = 2c^2 - 1$。



在 $2\cos\frac{1}{2}\theta$ 的一个周期（period）$0 \le \theta \le 4\pi$ 内，两条曲线相交两次，交点关于 $\theta = 2\pi$ 对称，而 $2\cos\frac{1}{2}\theta$ 正是在该处取得最小值 -2。

验算

- 以数值计算，$\cos\phi \approx 0.3660$ 给出 $\phi \approx 1.1961$，所以 (iii) 的第一个正数解是 $2\pi - 2\phi \approx 3.8911$。在该处 $2\cos\frac{1}{2}\theta \approx -0.7321$ 而 $\cos\theta \approx -0.7321$，符合要求。在 $[-6\pi, 6\pi]$ 上对 $2\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\theta$ 进行求根搜索，找到的恰好是该范围内形如 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 的六个值。
- 对 (ii) 作类似的搜索（避开极点（poles）），只在 2π 的倍数处找到根。
- 对 (i) 和 (ii) 的合理性检查：$\theta = \pi$ 不满足 (i)，因为 $2\sin\frac{1}{2}\pi = 2 \neq 0 = \sin\pi$；它亦不在 (ii) 的定义域（domain）之内，因为 $\tan\frac{1}{2}\pi$ 没有定义。

常见错误

- 在 (i) 中，约去 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 而没有说明它可能等于零；或把 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ 当作另一族独立的解，而没有留意到它已包含在前者之内。
- 在 (ii) 中，去分母之前忘记了 θ 必须避开 $\tan\theta$ 或 $\tan\frac{1}{2}\theta$ 没有定义的点。

- 在 (iii) 中,保留了大于 1 的根 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$;或在把 $4m\pi \pm (2\pi - 2\phi)$ 化成 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 的形式时，错误处理 $\pm$ 号。

STEP 之外

每一部分都是以半角的单一个函数作代换（substitution）来解方程，从而把三角方程化为代数方程。(ii) 中的代换 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ 尤其强大：它把 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 都表示成 t 的有理函数（rational function），这正是大学一年级微积分用它来求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的任何有理函数的积分的原因。从几何上看，它以有理点（rational points）把单位圆参数化（parametrise）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一书中，有更多运用这些想法的 STEP 式练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。