详细解答

STEP I 2003，第 2 题

纯数学 · 代数恒等式

STEP I 2003，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s1-q2

关键思路

考生的答案正确，当且仅当它满足方程，所以把它代入（substitute）方程，再消去分母。这样每一部分都会化为一个关于已知数的多项式（polynomial）条件。在第一部分，这个条件是一个二次型（quadratic form），对非零实数而言不可能等于零。在第二部分，它是一个三次式，可以漂亮地因式分解（factorise），而所得的因式正正就是题目问及的那三条等式。

解答

第一问

在整个解答中，a 和 b 都是非零实数。考生的答案正确，恰好就是 $x = a + b$ 满足方程的时候。要令这句话有意义，首先需要 $a + b \neq 0$，然后需要

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

两边同乘以非零的 $ab(a+b)$，这等价于

$$ab = (a+b)^2, \qquad \text{即} \qquad a^2 + ab + b^2 = 0.$$

配方（completing the square）得

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \tfrac{3}{4}b^2.$$

两项都是实数的平方，所以都 ≥ 0，而且因为 $b \neq 0$，第二项严格大于零。因此对任意实数 a 和任意非零实数 b，都有 $a^2 + ab + b^2 > 0$，所以这个条件永远不可能成立。

（若 $a+b=0$，考生的“答案” $x=0$ 代入方程后根本没有意义，所以这个情况也好不到哪里去。）因此不存在任何 a 和 b 的值使 $x=a+b$ 正确，这正是所要证明的。

第二问

现在 a、b、c 都非零。答案 $x=a+b+c$ 正确，当且仅当（if and only if）$a+b+c\neq 0$ 并且

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}.$$

两边同乘以 $abc(a+b+c)\neq 0$，这等价于

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0. \qquad (*)$$

想一想 怎样才能看出 $(*)$ 的左边可以因式分解?

要证明的结果提示我们, 因式应该是 $a+b$、$b+c$ 和 $c+a$。先试其中一个: 设 $b=-a$。这时 $a+b+c=c$,而 $ab+bc+ca=-a^2-ac+ca=-a^2$,所以左边变成 $c(-a^2)-(-a^2c)=0$。因此 $a+b$ 是一个因式，而根据对称性（symmetry），$b+c$ 和 $c+a$ 也是因式。左边的次数是 3，所以它是 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 的常数倍；比较 a^2b 的系数（两边都是 1），可知这个常数是 1。另一个做法是把两边都展开:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc&=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc-abc\\&=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc\\&=(a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

所以 $(*)$ 等同于

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

现在我们证明两个方向。

若答案正确。那么 $a+b+c\neq 0$ 而且 $(*)$ 成立，所以 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$。若干个数的乘积为零，其中必有一个因数为零，所以 $a+b=0$、$b+c=0$、$c+a=0$ 之中至少有一条成立。

反过来，假设这三条等式中至少有一条成立；根据对称性，不妨设 $a+b=0$。那么 $a+b+c=c\neq 0$，所以考生的答案是一个合理的非零数，而且 $(*)$ 的因式分解形式成立。由于从方程推到 $(*)$ 的每一步都是可逆的（我们只是乘以非零的数 $abc(a+b+c)$），所以 $x=a+b+c$ 满足方程。这一点也可以直接看出：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$，所以方程变成 $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$，它的解是 $x=c=a+b+c$。

因此，考生的答案正确，当且仅当 $a+b=0$、$b+c=0$、$c+a=0$ 之中至少有一条成立。

■

留意这个论证从来没有用到 a、b、c 是实数；这个因式分解是一个代数恒等式（identity），所以结果对非零复数（complex numbers）同样成立。相比之下，第一部分确实需要 a 和 b 是实数：在复数范围内，$a^2+ab+b^2=0$ 是有解的，例如 $b=a\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$。

验算

- 取 $a=2$、$b=-2$、$c=5$：这时 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$，而 $a+b+c=5$，所以考生是对的。
- 取 $a=b=c=1$：正确答案是 $x=\frac{1}{3}$，但考生的答案是 3；而事实上 $(a+b)(b+c)(c+a)=8\neq 0$。
- 在 $a=1$、$b=2$、$c=3$ 时展开 $(a+b)(b+c)(c+a)$：得 $3\cdot 5\cdot 4=60$，而 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=6\cdot 11-6=60$。
- 我们用精确的分数运算，对全部 17 576 个由非零有理数 n/d（其中 $|n|\leq 6$ 且 $d\in\{1,2,3\}$）组成的三元组，穷举检验了两个方向，没有发现任何例外。

常见错误

- 写下 $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$ 便停笔：这并不能说明它是正数。配方才可以。
- 在第二部分只证明一个方向。“当且仅当”需要证明两个方向，而且逆命题（converse）必须检查 $a+b+c\neq 0$。
- 忘记在两边同乘之前，必须先确定 $abc(a+b+c)$ 非零；正是这一点令各步可逆。

STEP 之外

表达式 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 是一个对称多项式（symmetric polynomial），而恒等式 $(a+b)(b+c)(c+a)=e_1e_2-e_3$（其中 $e_1=a+b+c$、$e_2=ab+bc+ca$、$e_3=abc$）正是对称多项式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）的一个例子：每个对称多项式都可以写成这些基本对称多项式的多项式。除了正负号之外，这些 e_1、e_2、e_3 也就是以 a、b、c 为根的三次多项式的系数，这正是它们在方程论（theory of equations）中随处可见的原因。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 本着这种精神讨论多项式环（polynomial rings），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多辨认因式分解的 STEP 练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。