详细解答

STEP I 2003，第 13 题

概率与统计 · 几何分布的期望值

STEP I 2003，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s1-q13

关键思路

第一部分的做法，是数每队射失的次数，而不是入球数：两队各射五球之后，比数相同的充要条件是两队射失的次数相同。至于期望值（expectation），留意突然死亡（sudden death）阶段是以每回合两球的方式进行的，而每一回合都是一次独立试验，以相同的概率结束这场互射十二码。因此回合数服从几何分布（geometric distribution），而射球次数的期望值可以拆成“必定要射的十球”加上“额外的射球，并按需要加射的机会加权”。

解答

我们按照模型的原意，假设每一次射球都与其他各次射球独立（independent），并且 A 队每次射入的概率恒为 p_A，B 队则恒为 p_B。记 $q_A = 1 - p_A$ 及 $q_B = 1 - p_B$。

射完十球后打和的概率 α

设 X 为 A 队在首五球中射失的球数，Y 为 B 队射失的球数。每队的五次射球都是射失概率相同的独立试验，所以

$$X \sim \mathrm{B}(5, q_A), \qquad Y \sim \mathrm{B}(5, q_B),$$

而且由于两队的射球互相独立，X 与 Y 亦互相独立。

A 队射入 $5 - X$ 球,B 队射入 $5 - Y$ 球,所以比数相同的充要条件是 $X = Y$。对 $i = 0, 1, \ldots, 5$,

事件 $\{X = Y = i\}$ 互不相交（disjoint），所以

$$\begin{aligned}\alpha = \mathrm{P}(X = Y) &= \sum_{i=0}^{5} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = i) \\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} q_A^i p_A^{5-i} \binom{5}{i} q_B^i p_B^{5-i} \\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}^2 (1-p_A)^i (1-p_B)^i\, p_A^{5-i} p_B^{5-i},\end{aligned}$$

这就是所求的表达式。（若改为数入球数，即两队各入 $5-i$ 球，会得到相同的和，因为 $\binom{5}{i} = \binom{5}{5-i}$。）

射球次数的期望值

如果射完十球后比数仍然相同，突然死亡阶段便以回合进行：每一回合中 A 队射一球，B 队射一球。若两球之中恰好只有一球射入，该回合便分出胜负，而这个情况出现的概率是

$$p_A q_B + q_A p_B = p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A) = p_A + p_B - 2p_A p_B = \beta.$$

否则（两队都射入或都射失）便要再进行一个回合。我们需要 $\beta > 0$，也就是说，我们排除 $p_A = p_B = 0$ 和 $p_A = p_B = 1$ 这两个平凡情况，因为在这两个情况下，任何回合都永远无法分出胜负。

> **想一想** 为甚么互射十二码不可以在一个回合的中途结束?

规则订明，当一队射入而另一队未能射入时，两队的射球次数必须相同。即使 A 队射失，B 队仍然要射自己的一球（B 队也可能射失）。所以突然死亡阶段的射球总是成对出现，射球总数是 $10 + 2R$，其中 R 是所进行的回合数（若比赛在首十球内已分出胜负，则 $R = 0$）。

在已知进入突然死亡阶段的条件下，各回合是独立试验，每个回合分出胜负的概率都是 β，所以 R 服从几何分布：

$$\mathrm{P}(R = k \mid \text{十球后打和}) = (1-\beta)^{k-1}\beta, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

它的平均值是

$$\mathrm{E}(R \mid \text{十球后打和}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta(1-\beta)^{k-1} = \beta \cdot \frac{1}{(1-(1-\beta))^2} = \frac{1}{\beta},$$

这里用到当 $|x| < 1$ 时 $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$，而由于 $0 < \beta \leq 1$，这条公式适用。

如果比赛在首十球内已分出胜负，则 $R = 0$。按射完十球后比数是否相同来取条件，

$$\mathrm{E}(R) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + (1-\alpha) \cdot 0 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

因此射球次数的期望值是

$$\mathrm{E}(10+2R) = 10 + \frac{2\alpha}{\beta},$$

正如所求。

验算

- 两队实力相同，$p_A = p_B = \frac{1}{2}$：由范德蒙恒等式（Vandermonde's identity）$\sum_i \binom{5}{i}^2 = \binom{10}{5} = 252$，所以 $\alpha = 252/2^{10} = \frac{63}{256}$，而 $\beta = \frac{1}{2}$。射球次数的期望值是 $10 + \frac{63}{64} = \frac{703}{64} \approx 10.98$。
- 如果一队百发百中而另一队一球不入（$p_A = 1$，$p_B = 0$），则 $\alpha = 0$（只有 $i = 0$ 的一项有可能不为零，但它含有 $p_B^5 = 0$），所以恰好射 10 球，与常理相符。
- 我们把 α 的公式与直接列举首十球全部 2^{10} 个结果所得的答案作了比对，又把 $10 + 2\alpha/\beta$ 与模拟 2×10^5 场互射十二码的结果作了比对；当 $p_A = \frac{3}{4}$、$p_B = \frac{2}{3}$ 时，公式给出 11.264，模拟则给出 11.25。

常见错误

- 把 β 当成 A 队赢得一个回合的概率 $p_A(1 - p_B)$：其实任何一队赢得一个回合，互射十二码都会结束。
- 把答案写成 $10 + 2/\beta$，忘记了突然死亡阶段只以概率 α 出现。
- 把突然死亡阶段的每一步算作一球，而不是两球。

STEP 之外

$\mathrm{E}(R) = \alpha\,\mathrm{E}(R \mid \text{打和}) + (1-\alpha)\,\mathrm{E}(R \mid \text{未打和})$ 这一步就是全期望定律（law of total expectation），它是大学一年级概率论中最有用的工具之一。突然死亡阶段也是一条带有吸收态（absorbing state）的简单马可夫链（Markov chain），而这里“到达吸收的期望时间”的计算，可以推广到随机漫步（random walk）和赌徒破产（gambler's ruin）问题。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对条件期望（conditional expectation）和这类马可夫链都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。