详细解答

# STEP I 2003，第 11 题

力学 · 斜面上的碰撞

**STEP I 2003，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/03-s1-q11

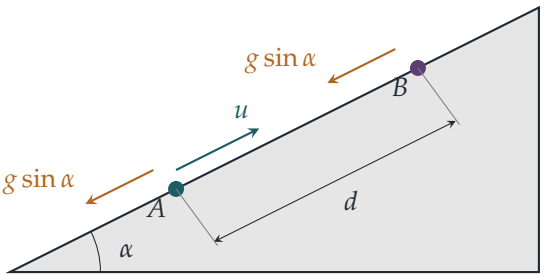
## 关键思路

在光滑（smooth）斜面上，无论速度如何，每个质点的加速度都相同，都是沿最大斜率线（line of greatest slope）向下的 $g\sin\alpha$。因此重力无法改变两个质点之间的相对运动：从其中一个质点看，另一个质点以恒定速度运动。这样一来，碰撞时间便很容易求出，而且不必经过繁琐的运动学计算，就能知道碰撞一刻的相对速度（relative velocity）。碰撞中的能量损失只取决于这个相对速度，这正是 $\alpha$、$g$ 和 $d$ 全都从答案中消失的原因。

## 解答

### 模型

我们把两个质点都视为点质量，沿着通过 $A$ 和 $B$ 的最大斜率线运动。斜面是光滑的，所以每个质点所受的力只有重量和法向反作用力（normal reaction）。沿垂直于斜面的方向分解，反作用力与 $mg\cos\alpha$ 平衡。沿斜面方向分解，每个质点的加速度都是沿斜面向下的 $g\sin\alpha$。取 $x$ 为由 $A$ 起沿斜面向上的距离。



### 碰撞时间

设 $a = g\sin\alpha$。以沿斜面向上为正方向，从 $A$ 出发的质点（称为 $P$）和从 $B$ 出发的质点（称为 $Q$）的位置分别为

$$x_P = ut - \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$x_Q = d - \tfrac{1}{2}at^2.$$

两者之间的距离为

$$x_Q - x_P = d - ut,$$

因为 $\frac{1}{2}at^2$ 项互相抵消。这段距离由 $d$ 开始均匀地缩短，并且恰好在

$$t = \frac{d}{u},$$

时变为零，这正是我们要证明的结果。这次抵消正是关键思路的体现：两个质点以同样的方式沿斜面下落，所以只有初始相对速率 $u$ 才有影响。

### 动能损失

在 $t = d/u$ 时，两个质点沿斜面向上的速度为

$$v_P = u - \frac{ad}{u}, \qquad v_Q = -\frac{ad}{u}.$$

为简便起见，记 $w = ad/u$。于是 $v_P = u - w$ 及 $v_Q = -w$，而 $P$ 以相对速率 $v_P - v_Q = u$ 接近 $Q$。

> **想一想** 重力正在作用，为甚么我们仍可使用动量守恒（conservation of momentum）？

碰撞是瞬时发生的。在极短的碰撞时间内，重力和法向反作用力这些有限的力所产生的冲量（impulse），与质点之间的巨大冲量相比可以忽略不计。因此在碰撞中，沿斜面方向的动量守恒。

设碰撞后沿斜面向上的速度为 $v'_P$ 和 $v'_Q$。由于两个质点的质量相等，动量守恒给出

$$v'_P + v'_Q = v_P + v_Q = u - 2w. \tag{1}$$

牛顿实验定律（Newton's experimental law）指出，分离速率等于接近速率的 $e$ 倍：

$$v'_Q - v'_P = e(v_P - v_Q) = eu. \tag{2}$$

我们不分别解出 $v'_P$ 和 $v'_Q$，而是利用恒等式

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}[(p+q)^2 + (p-q)^2].$$

把它分别应用于碰撞前和碰撞后，总动能（kinetic energy，简称 KE）为

$$\text{碰撞前动能} = \tfrac{1}{2}m(v_P^2 + v_Q^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + u^2],$$
$$\text{碰撞后动能} = \tfrac{1}{2}m(v_P'^2 + v_Q'^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + e^2u^2],$$

其中碰撞后的和与差分别用了 (1) 和 (2)。两式中“和”的一项相同，所以

$$\text{动能损失} = \tfrac{1}{4}mu^2 - \tfrac{1}{4}me^2u^2 = \tfrac{1}{4}mu^2(1-e^2),$$

正如所求。

**想一想** $(u-2w)^2$ 这一项在物理上代表甚么？为甚么它不会改变？

$v_P + v_Q$ 的一半就是质心（centre of mass）的速度。$\frac{1}{4}m(u-2w)^2$ 这一项是总质量 $2m$ 以该速度运动时的动能，而动量守恒令它保持不变。只有相对于质心的运动的动能才可能损失，而这部分动能只取决于相对速率：碰撞前是 $u$，碰撞后是 $eu$。

## 验算

- 若 $e = 1$（完全弹性，perfectly elastic），损失为零，理应如此。若 $e = 0$，两个质点在碰撞后一起运动，损失为 $\frac{1}{4}mu^2$，即相对运动的全部动能。
- 若 $\alpha = 0$，斜面变成水平面，$Q$ 保持静止，而 $P$ 经过时间 $d/u$ 后以速率 $u$ 到达它那里，与结果吻合。
- 数值上，取 $\alpha = 30°$、$g = 9.8$、$d = 2$、$u = 4$、$e = \frac{1}{2}$ 及 $m = 1$：在 $t = 0.5$ 时，两个速度为 1.55 和 $-2.45$。碰撞后它们变为 $-1.45$ 和 0.55，动能由 4.2025 降至 1.2025，损失为 3，等于 $\frac{1}{4}\cdot 16\cdot\frac{3}{4}$。另外以数值方法逐步模拟运动，随机测试了 1000 个情况，结果同样吻合。

## 常见错误

- 把 $Q$ 在碰撞一刻的速度当作零。它已经沿斜面下滑了 $d/u$ 这么长的时间，正如 $P$ 在这段时间内一直在减速。
- 在牛顿定律中弄错正负号。应把两个速度都按同一个正方向写出，然后用分离速率 $= e \times$ 接近速率。
- 完整解出 $v_P'$ 和 $v_Q'$，然后展开四个平方。这样做是可行的，但利用和与差的恒等式可以省去几乎所有代数运算。

## STEP 之外

两个部分都是转换到质心参考系（centre-of-mass frame）的例子。均匀重力场令每个质点都有相同的加速度，所以它在相对运动中完全消失。此外，任何系统的动能都可以分拆为质心的动能，加上相对于质心的动能（柯尼希定理，König's theorem）。在二体问题中，第二部分是 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$，其中折合质量（reduced mass）为 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$，在这里是 $\frac{1}{2}m$。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这两个想法都有仔细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。