详细解答

STEP I 2003，第 10 题

力学 • 薄片的质心

> **STEP I 2003，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q10

关键思路

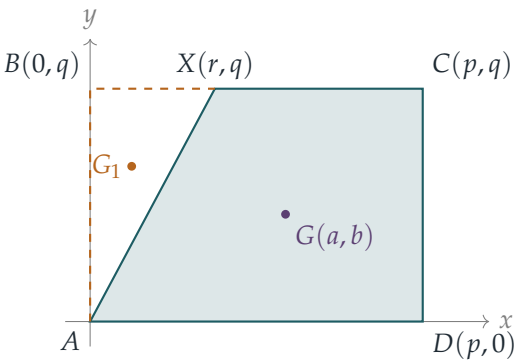
处理切去了一块的图形，最好的方法是相减：长方形对每条轴的矩（moment）等于梯形（trapezium）的矩加上三角形的矩，而各部分的质量与面积成正比。至于悬挂的部分，一块薄片（lamina）从某一点自由悬挂，静止时其重心（centre of gravity）必在该点的正下方，所以直线 AG 是铅垂的。这样，45° 这个条件就化为 a 与 b 之间一个非常简单的关系。

解答

我们把薄片当作均匀而且很薄，因此任何一部分的质量都与其面积成正比，而三角形的重心位于其形心（centroid），即三个顶点的平均位置。

重心

按题目所给的坐标轴，$A=(0,0)$，$D=(p,0)$，$C=(p,q)$，因此 $B=(0,q)$。由于 X 在 BC 上，且 $BX=r$，所以 $X=(r,q)$，其中 $0\le r\le p$。



三个部分如下。

- 长方形 $ABCD$：面积为 pq，重心为 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$。
- 三角形 ABX（被切去的部分）：面积为 $\frac{1}{2}qr$，重心 G_1 是 $(0,0)$、$(0,q)$ 和 (r,q) 的平均位置，即 $(\frac{r}{3}, \frac{2q}{3})$。
- 余下的梯形 $AXCD$：面积为 $pq - \frac{1}{2}qr = \frac{1}{2}q(2p-r)$，重心为 $G = (a,b)$。

长方形对每条轴的矩，等于它两个部分的矩之和。对 y-轴取矩（即比较 x-坐标），

$$pq \cdot \frac{p}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{r}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, a.$$

两边除以 $\frac{q}{2}$，得 $p^2 = \frac{r^2}{3} + (2p-r)a$；由于 $2p - r \geq p > 0$，我们可以除以它：

$$a = \frac{3p^2 - r^2}{3(2p-r)}.$$

同样地，对 x-轴取矩，

$$pq \cdot \frac{q}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{2q}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, b,$$

所以 $pq = \frac{2qr}{3} + (2p-r)b$，而

$$b = \frac{q(3p-2r)}{3(2p-r)}.$$

快速验算一下：$r = 0$（即没有切去任何部分）时，$a = \frac{p}{2}$，$b = \frac{q}{2}$，正是长方形的中心。

从 A 悬挂

当薄片从 A 自由悬挂并处于平衡（equilibrium）时，只有两个力作用在它上面：通过 G 的重量，以及在 A 的反作用力。两个力若互相平衡，必定沿同一直线作用，所以 G 在 A 的正下方。

想一想 “AD 在水平线以下 45°”怎样变成一条关于 a 和 b 的方程?

由于 AG 是铅垂的，而 AD 与水平线成 45°，所以 AD 与 AG 亦成 45°；即是说，角 GAD 是 45°。在我们的坐标轴中，AD 是正 x-轴，而 $G=(a,b)$，其中 $a,b>0$（它位于梯形之内），所以 $\tan\angle GAD = b/a$。因此 $b/a=1$，即

$$a=b.$$

代入上面的表达式，并约去共同的正分母 $3(2p-r)$，

$$\begin{aligned} & 3p^2-r^2 = q(3p-2r) \\ \iff\quad & r^2-2qr+3pq-3p^2=0. \end{aligned}$$

由二次公式（quadratic formula），

$$r = q\pm\sqrt{q^2-(3pq-3p^2)} = q\pm\sqrt{q^2-3pq+3p^2}.$$

根号内的量是 $(q-\frac{3}{2}p)^2+\frac{3}{4}p^2>0$，所以两个根都是实数，而且互不相同。记 $s=\sqrt{q^2-3pq+3p^2}>0$。

选择正负号。由于 X 在边 BC 上，而这条边的长度是 p，我们需要 $0\le r\le p$。现在证明根 $q+s$ 总是大于 p。

- 若 $q\ge p$，则 $q+s>q\ge p$，因为 $s>0$。
- 若 $q<p$，则 $p-q>0$，而且

$$s^2-(p-q)^2 = (q^2-3pq+3p^2)-(p^2-2pq+q^2) = 2p^2-pq = p(2p-q)>0,$$

因为 $q<p<2p$。所以 $s>p-q$，从而 $q+s>p$。

无论哪种情况，取正号都会令 X 越过 C，落在薄片之外，所以不可能。因此

$$r = q-\sqrt{q^2-3pq+3p^2},$$

这正是所要证明的结果。

为完整起见补充一点：这个根确实位于 $[0,p]$ 之内，当且仅当 $p\le q\le 2p$。事实上，$q-s\ge 0 \iff q^2\ge s^2 \iff 3p(q-p)\ge 0 \iff q\ge p$，而且（当 $q>p$ 时）$q-s\le p \iff (q-p)^2\le s^2 \iff p(2p-q)\ge 0 \iff q\le 2p$。所以题目描述的情况只会在这类形状中出现，这与直觉吻合：未经切割的正方形（$q=p$，$r=0$）从一角悬挂时，对角线是铅垂的；而在另一个极端（$q=2p$，$r=p$），图形就是直角三角形 ACD，其形心 $(\frac{2p}{3},\frac{q}{3})$ 同样满足 $a=b$。

验算

- 取 $r = 0$ 便得回长方形的中心 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$，而 $r = p$ 则给出 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$，即三角形 ACD 的形心。
- 取 $p = 1$，$q = 1.5$，公式给出 $r = 1.5 - \sqrt{0.75} \approx 0.634$，于是 $a = b \approx 0.634$，所以 AG 确实与 AD 成 45°。另一个根 ≈ 2.37，超过了 $p = 1$。
- 我们亦以一般的多边形形心公式，用数千组随机的 p, q, r 核对过重心公式。

常见错误

- 把三角形的形心写成 $(\frac{r}{3}, \frac{q}{3})$：它有两个顶点位于高度 q，所以形心的高度是 $\frac{2q}{3}$。
- 把三角形的矩加上去而不是减去：梯形是长方形*减去*三角形。
- 以一句含糊的“r 一定很小”来舍去正号。真正的理由是 $r \le p$，而这需要一段简短的论证，按 $q \ge p$ 与否分开两种情况处理。

STEP 之外

用相减法求质心（centre of mass），其实是计算 $\iint x \, \mathrm{d}A \big/ \iint \mathrm{d}A$ 的离散版本；到了大学，你会在二重积分（double integral）中再遇上同一个想法，用来处理密度不均匀的薄片以及立体。悬挂条件则是一个普遍原理的最简单情况：一个以某一点为支点的刚体（rigid body），当其质心位于支点正下方时处于稳定平衡，此时它的势能（potential energy）最小。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对质心和刚体平衡有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。