详细解答

STEP I 2003，第 1 题

纯数学 · 幂和

> **STEP I 2003，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q1

关键思路

题目已经告诉我们答案的形式：一个以 n 为变量、系数未知的多项式（polynomial），所以余下的工作只是把这些系数确定下来。一个对所有 n 都成立的多项式恒等式（identity），对几个方便计算的 n 值当然也成立，而每个值都给出一条线性方程（linear equation）。让求和由负数下标开始是刻意安排的技巧：这样我们便可以使用 $n=-1$ 和 $n=-2$ 等较小的值，令方程组呈现悦目的对称性。

解答

题目中 r 既用作求和变量，又用作系数。为免混淆，我们把求和变量写成 k，而 p,q,r,s 和 a,b,c,d,e 则保留作系数。

平方和

设 $S(n)=\sum_{k=-1}^{n} k^2$，于是

$$S(n)=pn^3+qn^2+rn+s.$$

由 $k=-1$ 开始的和对所有 $n\geq -1$ 都有意义，而且

$$S(-1)=1,\qquad S(0)=1+0=1,\qquad S(1)=1+0+1=2,\qquad S(2)=1+0+1+4=6.$$

把 $n=-1,0,1,2$ 代入题目给出的形式，得到四条方程

$$-p+q-r+s=1, \tag{1}$$
$$s=1, \tag{2}$$
$$p+q+r+s=2, \tag{3}$$
$$8p+4q+2r+s=6. \tag{4}$$

由 (2) 得 $s=1$，所以 (1) 和 (3) 变成 $-p+q-r=0$ 和 $p+q+r=1$。两式相加得 $2q=1$，所以 $q=\frac{1}{2}$，从而 $p+r=\frac{1}{2}$。方程 (4) 变成

$$8p+2+2r+1=6 \quad\Longrightarrow\quad 8p+2r=3 \quad\Longrightarrow\quad 6p+2(p+r)=3,$$

所以 $6p=2$，得 $p=\frac{1}{3}$ 和 $r=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$。因此

$$\sum_{k=-1}^{n} k^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n+1.$$

想一想 题目要求的是由 $k=0$ 开始的和，但我们求得的是由 $k=-1$ 开始的和。两者有何分别?

两者只相差 $k=-1$ 那一项，即 $(-1)^2=1$。所以

$$\sum_{k=0}^{n} k^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n=\tfrac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

这正是所要证明的结果。

立方和

现在设 $T(n)=\sum_{k=-2}^{n}k^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e$。这里有五个未知数，所以我们取 $n=-2,-1,0,1,2$ 这五个值:

$$T(-2)=-8,\quad T(-1)=-9,\quad T(0)=-9,\quad T(1)=-8,\quad T(2)=0.$$

由此得到

$$16a-8b+4c-2d+e=-8, \tag{5}$$
$$a-b+c-d+e=-9, \tag{6}$$
$$e=-9, \tag{7}$$
$$a+b+c+d+e=-8, \tag{8}$$
$$16a+8b+4c+2d+e=0. \tag{9}$$

由 (7) 得 $e=-9$。这些方程按 $\pm n$ 成对出现，所以把每一对相加和相减最为划算：偶次幂和奇次幂便会分开。

利用 $e=-9$，(6) 和 (8) 变成 $a-b+c-d=0$ 和 $a+b+c+d=1$。相加和相减，得

$$a+c=\tfrac{1}{2}, \qquad b+d=\tfrac{1}{2}.$$

同样地，(5) 和 (9) 变成 $16a-8b+4c-2d=1$ 和 $16a+8b+4c+2d=9$。相加和相减，得

$$32a+8c=10, \qquad 16b+4d=8,$$

即 $16a+4c=5$ 和 $4b+d=2$。代入 $c=\frac{1}{2}-a$ 得 $12a+2=5$，所以 $a=\frac{1}{4}$ 和 $c=\frac{1}{4}$。代入 $d=\frac{1}{2}-b$ 得 $3b+\frac{1}{2}=2$，所以 $b=\frac{1}{2}$ 和 $d=0$。因此

$$\sum_{k=-2}^{n} k^3=\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2-9.$$

与由 $k=0$ 开始的和相比，由 $k=-2$ 开始的和多了 $(-2)^3+(-1)^3=-9$ 这些项，所以我们加上 9：

$$\sum_{k=0}^{n} k^3=\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2=\tfrac{1}{4}n^2\left(n^2+2n+1\right)=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

这正是所要证明的结果。

验算

当 $n=10$ 时，两条公式给出 $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=385$ 和 $\frac{1}{4}\cdot 100\cdot 121=3025$，而直接把 $0^2+1^2+\cdots+10^2$ 和 $0^3+1^3+\cdots+10^3$ 加起来，也得到相同的数字。还可留意 $3025=55^2=(0+1+\cdots+10)^2$：首 n 个立方数之和，等于首 n 个整数之和的平方。我们亦用电脑核对过，两条公式对由 0 至 59 的每个 n 都准确成立。

常见错误

- 由我们算出的和转到题目要求的和时，忘记了 $k=-1$（或 $k=-2$ 和 $k=-1$）的项。注意 $(-2)^3+(-1)^3=-9$，而不是 $+9$。
- 处理立方和时只打算用四个 n 值：五个未知数需要五条方程。
- 把系数 r 与题目中的求和变量 r 混淆；把其中一个改名便可避免出错。

STEP 之外

为甚么我们可以假设答案是一个次数高一次的多项式？因为一个 $m+1$ 次多项式的差分 $P(n)-P(n-1)$ 是 m 次的，所以总可以解出一个差分为 n^m 的多项式；这就是*有限差分演算*（calculus of finite differences）的起点，而一般情况下出现的系数由伯努利数（Bernoulli numbers）决定，即福尔哈伯公式（Faulhaber's formula）。这里所用的方法，即凭多项式在若干点上的值把它确定下来，称为*多项式插值*（polynomial interpolation），它在数值分析（numerical analysis）中会以拉格朗日插值（Lagrange interpolation）的形式再度出现。想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。