详细解答

STEP III 2002，第 9 题

力学 • 质心与倾倒

STEP III 2002，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q9

关键思路

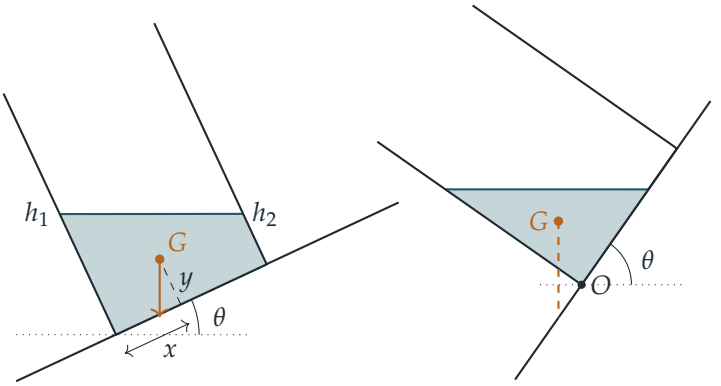
流体的自由表面（free surface）是水平的，所以在容器的参考系（容器倾斜了 θ 角）中，它是一条与底面成 θ 角的斜直线。因此，若液面与两边侧壁都相交，流体的横截面就是梯形（trapezium）；若液面未到达上方侧壁便先碰到底面，横截面就是直角三角形。这样，求质心（centre of mass）便成为一个二维的形心（centroid）计算。至于倾倒（toppling），由于容器是轻的，一切取决于通过流体质心的铅垂线与斜面相交于何处。

解答

建立模型

我们把容器看成一个轻的棱柱体，器壁厚度可忽略；把流体看成相对于容器静止的均匀连续体；并假设斜面足够粗糙，容器不会滑动。垂直于底面水平边的每一个铅垂横截面都相同，而流体是均匀的，所以流体的质心就是其中一个横截面的形心。该横截面的宽度为 a，面积为 $ka^3/a = ka^2$。

沿底面由下方侧壁起（沿斜面向上）量度 X，并垂直于底面量度 Y。随着 X 增加，底面以 θ 角相对于水平面上升，所以水平的液面相对于底面以 θ 角下降：X 每增加一个单位，液面离底面的高度便减少 $\tan\theta$。记 $d = a\tan\theta$ 为整个宽度上的总下降量。



左图显示 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$ 的情况（流体接触两边侧壁）；右图显示 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$ 且 $\theta > 45°$ 的情况，此时通过 G 的铅垂线落在底面之外。

$k > \frac{1}{2}\tan\theta$ 的情况

设下方侧壁和上方侧壁处的深度分别为 h_1 和 h_2。那么 $h_1 - h_2 = d$，而梯形的面积为 $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ka^2$，所以 $h_1 + h_2 = 2ka$。因此

$$h_2 = ka - \tfrac{1}{2}d = a(k - \tfrac{1}{2}\tan\theta),$$

它为正数当且仅当 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$。所以这正是液面与两边侧壁都相交的情况。

把梯形分割成一个 $a \times h_2$ 的长方形，以及叠在其上的一个直角三角形，其两条直角边分别为 a（沿 $Y = h_2$）和 d（沿下方侧壁向上）。

- 长方形：面积 ah_2，形心 $\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}h_2\right)$。
- 三角形：顶点为 $(0, h_2)$、(a, h_2)、$(0, h_2 + d)$，所以面积为 $\frac{1}{2}ad$，形心（各顶点的平均）为 $\left(\frac{1}{3}a,\ h_2 + \frac{1}{3}d\right)$。

对下方侧壁取矩（taking moments），总面积为 ka^2，

$$ka^2\,x = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}ad \cdot \tfrac{1}{3}a \quad\Longrightarrow\quad kx = \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{12}d.$$

除以 ka 并利用 $d = a\tan\theta$，

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} - \frac{\tan\theta}{12k}.$$

对底面取矩，

$$ka^2\,y = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{2}ad\left(h_2 + \tfrac{1}{3}d\right),$$
$$ka\,y = \tfrac{1}{2}h_2^2 + \tfrac{1}{2}dh_2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}h_2(h_2 + d) + \tfrac{1}{6}d^2.$$

现在 $h_2 = ka - \frac{1}{2}d$ 而 $h_2 + d = ka + \frac{1}{2}d$，所以 $h_2(h_2 + d) = k^2a^2 - \frac{1}{4}d^2$，于是

$$ka\,y = \tfrac{1}{2}k^2a^2 - \tfrac{1}{8}d^2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}k^2a^2 + \tfrac{1}{24}d^2.$$

除以 ka^2，

$$\frac{y}{a} = \frac{k}{2} + \frac{\tan^2\theta}{24k},$$

正如所求。

$k < \frac{1}{2}\tan\theta$ 的情况

这时 h_2 会是负数，所以液面在距离下方侧壁 $b < a$ 的某处与底面相交，而流体的横截面是一个直角三角形，其两条直角边分别为沿底面的 b 和沿下方侧壁向上的 h。由液面的斜率得 $h = b\tan\theta$，由面积得 $\frac{1}{2}bh = ka^2$。所以 $b^2\tan\theta = 2ka^2$，于是

$$b = a\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}, \qquad h = a\sqrt{2k\tan\theta}.$$

（事实上，$b < a$ 正是因为 $2k < \tan\theta$；容器很高，所以 h 不会造成问题。）三角形的形心位于每条直角边的三分之一处，所以

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\cot\theta}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\tan\theta}.$$

当 $k = \frac{1}{2}\tan\theta$ 时，两组公式都给出 $x/a = \frac{1}{3}$ 和 $y/a = \frac{1}{3}\tan\theta$，所以两种情况互相衔接。

倾倒

想一想 容器在放手的一刻会否翻倒，取决于甚么？

容器是轻的，所以唯一的重量就是流体的重量，它铅垂地作用于流体的质心 G。斜面只能对底面施力，所以法向反作用力（normal reaction）作用于底面上某处，即下方边缘 O 与上方边缘之间。假如通过 G 的铅垂线与斜面相交于 O 的下坡一侧，重量对 O 便有一个力矩（moment），而这样的反作用力无法把它平衡，于是容器绕 O 转动：它会倾倒。

取 O 为原点，x 沿斜面向上，y 垂直于斜面。在这组坐标轴中，铅垂向下的方向的分量为 $(-\sin\theta, -\cos\theta)$，所以由 $G = (x, y)$ 沿铅垂线向下走一段距离 $y\sec\theta$，便到达斜面上的

$$x - y\tan\theta.$$

所以若 $x < y\tan\theta$，容器便会倾倒。

假设 $k < \frac{1}{2}$ 且 $\theta > 45°$。那么 $\tan\theta > 1 > 2k$，所以 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$，我们处于三角形的情况。此时

$$y\tan\theta - x = \frac{a}{3}\left(\sqrt{2k\tan\theta}\,\tan\theta - \sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\left(\tan^2\theta - 1\right) > 0,$$

因为 $\tan\theta > 1$。因此 $x < y\tan\theta$：通过 G 的铅垂线落在下方边缘之下，无论 $k < \frac{1}{2}$ 取甚么值，容器都会倾倒。（在三角形的情况中，同样的计算显示若 $\theta < 45°$ 则容器是稳定

的，所以 45° 正是该情况下的临界值。）这就是所要的结果。条件 $k < \frac{1}{2}$ 的作用，是保证当 $\theta > 45^\circ$ 时必定处于三角形的情况。

验算

- 当 $\theta = 0$ 时，第一种情况给出 $x = \frac{1}{2}a$ 和 $y = \frac{1}{2}ka$，即一块深度为 ka 的流体的中心。
- 两种情况在 $k = \frac{1}{2}\tan\theta$ 时吻合，此时梯形退化成三角形。
- 数值验算：对 300 组随机的 (k, θ) 直接对流体区域进行积分，结果与两组公式的误差都在 1.4×10^{-6} 之内（取 $a = 1$）。例如，$\theta = 55^\circ$、$k = 0.3$ 给出 $x \approx 0.216a$、$y \approx 0.309a$，而 $y\tan\theta \approx 0.441a > x$，所以容器会倾倒。

常见错误

- 把液面画成与底面平行，或者斜向错误的一边：流体是堆向下方侧壁的。
- 忘记容器是轻的，而为容器另加一个重量：整体的质心就是流体的质心。
- 把通过 G 的铅垂线与底面的中心比较，而不是与下方边缘 O 比较。

STEP 之外

“通过质心的铅垂线是否与底面相交?”这个判别法, 是稳定性分析（stability analysis）中最简单的情形。浮在水面的船只也是用同样的方法处理, 不过在那里浮力（buoyancy）作用于被排开的水的质心, 而这个点会随船身倾侧而移动; 由此便引出定倾中心（metacentre）的概念。流动中的流体（放手后的晃荡）则是流体动力学（fluid dynamics）中困难得多的问题。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对刚体平衡（rigid-body equilibrium）及绕轴转动有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。