详细解答

STEP III 2002，第 8 题

纯数学 · 托勒密定理

STEP III 2002，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q8

关键思路

单位圆上两点之差，只要抽出“平均”角，便可漂亮地因式分解：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}\right)$，而括号内正是 $2\mathrm{i}$ 乘以一个正弦。这样一来，每条弦（chord）的模（modulus）和辐角（argument）便同时求得。至于最后一部分，两个辐角相同的复数指向同一方向，所以它们的模直接相加；余下只需一条把三个乘积连系起来的代数恒等式。

解答

$u_1 - u_2$ 的辐角

设 $u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$。抽出因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$，

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \cdot 2\mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2) \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\cdot(-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2-\pi)/2}, \end{aligned}$$

最后一行用了 $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$。

? **想一想** 为甚么可以从这条式子直接读出辐角？又为甚么正弦要写成 $\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$ 而不是 $\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$？

形如 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 的数，只有在 $r>0$ 时，其辐角才是 ϕ（可相差 2π 的倍数）。这里 $0<\theta_2-\theta_1<2\pi$，所以 $0<\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)<\pi$，正弦严格为正。若反过来写，正弦便是负数，辐角就会相差 π。

因此 $|u_1-u_2| = 2\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$，而 $\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2-\pi)$ 是 u_1-u_2 的一个辐角。取 arg 为 $(-\pi,\pi]$ 内的主值（principal value）：由于 $-\pi<\theta_1<\theta_2<\pi$，

$$-\tfrac{3\pi}{2} < \tfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2-\pi) < \tfrac{\pi}{2}.$$

若此值大于 $-\pi$，它本身已是主辐角（$n=0$）；否则它落在 $(-\frac{3\pi}{2},-\pi]$ 内，加上 2π 便回到范围之内（$n=1$）。故此

$$\arg(u_1-u_2) = \tfrac{1}{2}(\theta_1+\theta_2-\pi)+2n\pi, \qquad n=0 \text{ 或} 1,$$

正如题目所求。

两个乘积的辐角相同

以上推导除了用到 $\theta_1<\theta_2$ 且两者皆在 $(-\pi,\pi)$ 内之外，并没有用到 u_1,u_2 的任何其他性质。所以对任意 $j<k$，

$$u_j-u_k = 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k-\theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j+\theta_k-\pi)/2},$$
$$u_k-u_j = -(u_j-u_k) = 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k-\theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j+\theta_k+\pi)/2},$$

其中用了 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，而两式前面的实数因子都是正数。对 $j<k$，记 $s_{jk}=\sin\frac{1}{2}(\theta_k-\theta_j)>0$，并记 $\Sigma=\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4$。相乘（辐角相加），

$$(u_1-u_2)(u_4-u_3) = 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1+\theta_2-\pi)+(\theta_3+\theta_4+\pi)]/2} = 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2},$$
$$(u_1-u_4)(u_3-u_2) = 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1+\theta_4-\pi)+(\theta_2+\theta_3+\pi)]/2} = 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}.$$

两者都是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ 的正数倍，所以各自的辐角都是 $\frac{1}{2}\Sigma$（可相差 2π 的倍数）。因此它们的主辐角只可能相差 2π 的倍数：

$$\arg((u_1-u_2)(u_4-u_3)) = \arg((u_1-u_4)(u_3-u_2)) + 2n\pi$$

其中 n 为某个整数。（事实上 $n=0$，因为两个主辐角若相差 2π 的倍数，就必定相等；但题目只要求较弱的这个结论。）

最后一部分

把三个乘积记为

$$A=(u_1-u_2)(u_4-u_3), \qquad B=(u_1-u_4)(u_3-u_2), \qquad C=(u_1-u_3)(u_4-u_2).$$

展开得

$$\begin{aligned} A+B &= (u_1u_4-u_1u_3-u_2u_4+u_2u_3)+(u_1u_3-u_1u_2-u_3u_4+u_2u_4)\\ &= u_1u_4+u_2u_3-u_1u_2-u_3u_4,\\ C &= u_1u_4-u_1u_2-u_3u_4+u_2u_3, \end{aligned}$$

所以 $A+B=C$。这纯粹是代数运算，对任意四个复数都成立。

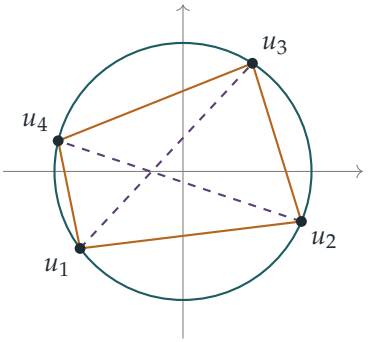
现在利用上一部分的结果：$A=a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ 及 $B=b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$，其中 $a=4s_{12}s_{34}>0$，$b=4s_{14}s_{23}>0$。于是 $|A|=a$，$|B|=b$，并且

$$|C|=|A+B|=|(a+b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}|=a+b=|A|+|B|,$$

因为 $a+b>0$ 而 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}|=1$。即是说，

$$|(u_1-u_2)(u_4-u_3)|+|(u_1-u_4)(u_3-u_2)|=|(u_1-u_3)(u_4-u_2)|.$$

重点在于：三角不等式（triangle inequality）$|A+B|\le|A|+|B|$ 恰好在 A 与 B 指向同一方向时变成等式，而这正是中间部分所证明的。



从几何角度看，$|u_j-u_k|$ 是一条弦的长度；又因为辐角递增，$u_1u_2u_3u_4$ 是一个顶点依次排列的圆内接四边形（quadrilateral inscribed in the circle）。这条恒等式说明：两组对边之积的和，等于两条对角线（虚线）之积。这就是托勒密定理（Ptolemy's theorem）。

验算

- 正方形：$\theta_k=-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$。每条边长 $\sqrt{2}$，每条对角线长 2，而确实 $2+2=4$。
- 取 $\theta=(-2.5,-0.4,1.0,2.9)$，得 $|A|\approx 2.8223$，$|B|\approx 1.1013$ 及 $|C|\approx 3.9236=|A|+|B|$。
- 随机选取 2×10^5 组依次排列的 θ_k，$\arg(u_1-u_2)$ 的公式每次都以 $n=0$ 或 1 成立（两个值都有出现），而恒等式的误差不超过 2×10^{-15}。

常见错误

- 写出 $u_1-u_2=2\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$ 后，把辐角读成 $\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\pi)$，忘记了正弦是负数。

- 把 $u_4 - u_3$ 当作与 $u_3 - u_4$ 有相同的辐角：把差的次序倒转，辐角会增加 π。
- 断言 $|A| + |B| = |A + B|$ 而不说明原因；这需要 A 与 B 的辐角相同。

STEP 之外

托勒密定理有逆定理（converse），也有更一般的形式：对平面上任意四点，$|A| + |B| \geq |C|$（只是把三角不等式应用于 $A + B = C$），等号恰好在四点依次位于同一个圆或同一条直线上时成立。这背后是交比（cross-ratio）$\frac{(u_1-u_2)(u_3-u_4)}{(u_1-u_4)(u_3-u_2)}$：它恰好在四点共圆（concyclic）时为实数，并且在莫比乌斯变换（Möbius transformations）下保持不变，是大学一年级复分析（complex analysis）与几何的核心对象。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以精彩的图画阐述了这些想法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。